Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky, Universität Stuttgart

Analysis 3

Vorlesungsmitschrieb

Stuttgart, Wintersemester 2012 / 2013

Revision: 2. Januar 2014

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.[1]

[1]Henri Menke, phy86901@stud.uni-stuttgart.de

INHALTSVERZEICHNIS

1 FUNKTIONENTHEORIE

1.1 Grundlagen

1.1 **Definition** *Die komplexen Zahlen werden definiert durch*

$$\mathbb{C} \coloneqq \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &\coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &\coloneqq (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).\end{aligned}$$

1.2 *Bemerkung:* **1.)** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$.

2.) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus, insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2) &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2),\\ \varphi(x_1 \cdot x_2) &= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2).\end{aligned}$$

Identifiziere $\mathbb{R}$ mit $\varphi(\mathbb{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Schreibe $(x, 0) \eqqcolon x \in \mathbb{R}$

3.) Imaginäre Einheit $\mathrm{i} \coloneqq (0, 1)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \\ (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y \cdot \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y \end{cases}$$

Rechnen in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2)\\ &= x_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1 + (\mathrm{i})^2 y_1 y_2\\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x + \mathrm{i}y} &= \frac{1}{x + \mathrm{i}y} \frac{x - \mathrm{i}y}{x - \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 - (\mathrm{i}y)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - \mathrm{i}y)\\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2} \quad = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\end{aligned}$$

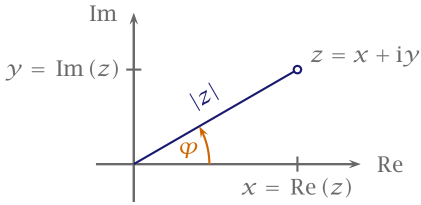
Der Realteil einer komplexen Zahl ist definiert als

$$\operatorname{Re}(x,y) = \operatorname{Re}(x+\mathrm{i}y) = x,$$

der Imaginärteil ist definiert als

$$\operatorname{Im}(x,y) = \operatorname{Im}(x+\mathrm{i}y) = y.$$

Gaußsche Zahlenebene



1.3 **Definition** **1.)** *$z = x + \mathrm{i}y \implies \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ heißt konjugiert komplexe Zahl zu z.*

2.) *$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$ heißt Betrag von z.*

3.) *Polardarstellung: Sei $z = x+\mathrm{i}y = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, wobei $\varphi = \arg(z)$ (Argument von z) eindeutig gegeben ist durch*

$$-\pi \le \varphi < \pi\,, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Rechnen mit Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\ z^n &= |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \end{aligned}$$

Die Lösung von $z^n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |z| &= r^{1/n}, \\ \varphi &= \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\,, \quad k = 0,1,\dots,n-1. \end{aligned}$$

1.4 **Satz** *$(\mathbb{C},+,\cdot,|\cdot|)$ ist ein bewerteter Körper, das heißt für $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gelten:*

1.) $|z| \ge 0 \ \wedge\ (|z| = 0 \iff z = 0)$

2.) $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

3.) $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$ *($\triangle$-Ungleichung)*

Außerdem gilt die »$\triangle$-Ungleichung nach unten«:

$$|z_1 \pm z_2| \ge \Big|\,|z_1| - |z_2|\,\Big|$$

1.5 **Definition** *Eine Folge* (z_n) *in* $\mathbb{C}$ *konvergiert gegen* $z \in \mathbb{C}$*, falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N_\varepsilon : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Man schreibt $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ *oder* $z_n \to z\ (n \to \infty)$. ⋊

1.6 **Satz** *Es gelte* $z_n \to z$ *und* $w_n \to w$ *in* $\mathbb{C}$*. Dann gelten*

1.) $z_n \pm w_n \to z \pm w$,

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n.$$

2.) $z_n \cdot w_n \to z \cdot w$,

3.) *Falls* $w \neq 0$ *und*

$$w_n' := \begin{cases} 1 & \text{falls } w_n = 0 \\ w_n & \text{sonst} \end{cases},$$

dann

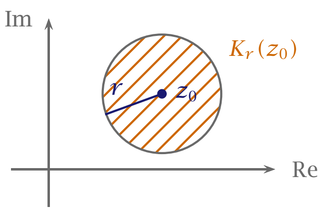
$$\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}.$$

4.) $z_n \to z \iff \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z.$ ⋊

1.7 **Definition** **1.)** *Seien* $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$*. Dann heißt*

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

offene Kreisscheibe um z_0.



2.) *Eine Teilmenge* $O \subseteq \mathbb{C}$ *heißt offen, falls*

$$\forall\, z \in O\, \exists\, r_z > 0 : K_{r_z}(z) \subseteq O$$

$A \subseteq \mathbb{C}$ *heißt abgeschlossen, falls* $\mathbb{C} \setminus A$ *offen.*

Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen sind offen. Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist

$$\mathring{M} := \bigcup_{O \in \{O \subseteq \mathbb{C} : O \text{ offen} \wedge O \subseteq M\}} O \quad \text{(ist offen)}$$

das Innere von M (die größte offene Menge $O \subseteq M$)

$$\overline{M} := \bigcap_{A \in \{A \subseteq \mathbb{C} : A \text{ abgeschlossen} \wedge M \subseteq A\}} A \quad \text{(ist abgeschlossen)}$$

der Abschluss von M (die kleinste abgeschlossene Menge A mit $M \subseteq A$) ⋊

1.8 ▶| *Beispiel* **1.)** $\emptyset$, $\mathbb{C}$ sind offen und abgeschlossen. Alle anderen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind entweder offen, abgeschlossen oder keins von beidem (beispielsweise halboffene Intervalle).

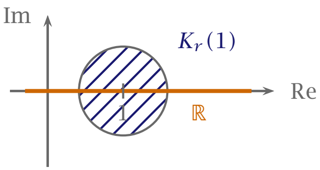
2.) $K_r(z_0)$ ist offen.

$$\overline{K_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$$

3.) $\mathbb{R}$ ist nicht offen in $\mathbb{C}$.

Für $z_0 \in \mathbb{R}$ ist für beliebig kleines $r > 0$ stets

$$K_r(z_0) \ \cap \ \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset.$$



Ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen? Ja. $\iff$ Ist $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ offen? Ja. |◀

1.9 **Definition** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$. Dann heißt f stetig in $z_0 \in O$, falls*

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta_\varepsilon \, \forall \, z \in O : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

oder

$$\forall \, (z_n) \text{ Folge in } O : z_n \to z_0 \implies f(z_n) \to f(z_0).$$

f heißt stetig, falls f in jedem $z_0 \in O$ stetig ist. ⋊

1.10 **Satz** **1.)** *Seien $f, g : O \to \mathbb{C}$, $z_0 \in O$, f, g stetig in z. Dann sind*

$$f \pm g \,, \quad f \cdot g \,, \quad \frac{f}{g} \ \text{falls } g(z_0) \neq 0$$

stetig in z_0.

2.) *Sei $f: O \to \widetilde{O} \subseteq \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in O$ und $g: \widetilde{O} \to \mathbb{C}$ stetig in $f(z_0)$.*

Dann ist $g \circ f$ stetig in z_0. Beweis über Folgen. ⋊

1.11 *Bemerkung:* Stetigkeit genauso für $f: M \to \mathbb{C}$ mit beliebiger Menge $M \subseteq \mathbb{C}$. ⊸

1.12 **Funktionenfolgen** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n, f: M \to \mathbb{C}$*

1.) *(f_n) heißt punkteweise konvergent gegen f auf M, falls*

$$\forall\, z \in M\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_{\varepsilon,z} \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N_{\varepsilon,z} \,:\, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

2.) *(f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen f auf M, falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N_\varepsilon\, \forall\, z \in M \,:\, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$ ⋊

1.13 **Satz** *Seien $f_n: M \to \mathbb{C}$ stetig, (f_n) gleichmäßig konvergent auf M gegen f. Dann ist f auch stetig auf M.*

BEWEIS Seien $z_0 \in M$, $\varepsilon > 0$ fest und

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

1. Schritt: Wähle ein N_ε so, dass $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ für $n > N_\varepsilon$ und beliebige z (gleichmäßige Konvergenz von f_n), also

$$|f(z) - f(z_0)| \le \underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{<\varepsilon/3} + |f_n(z) - f_n(z_0)| + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{<\varepsilon/3}.$$

2. Schritt: Setze $n := N_\varepsilon + 1$ und nutze die Stetigkeit von f_n. Für $|z - z_0| < \delta$ gilt, dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\le \underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{<\varepsilon/3} + \overbrace{|f_n(z) - f_n(z_0)|}^{|f_{N_\varepsilon+1}(z) - f_{N_\varepsilon+1}(z_0)| < \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{<\varepsilon/3} \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$ ■

1.14 **Definition** *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.* ⋊

1.15 **Weierstraß-Kriterium** *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \ge 0$ konvergent und gilt $f_n: M \to \mathbb{C}$, $|f_n(z)| \le a_n$ auf $M \subseteq \mathbb{C}$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig konvergent auf M und absolut konvergent für $z \in M$.* ⋊

1.16 *Beispiel* Seien $M := \overline{K_2(0)} \subseteq \mathbb{C}$, $f_n(z) := \frac{z^n}{(n+1)^2 2^n}$. Wähle

$$a_n := \frac{1}{(n+1)^2} \implies \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty\,, & \text{d.h. konvergent} \\ |f_n(z)| \leq a_n \end{cases}$$

$$\implies g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ ist stetig auf } \overline{K_2(0)}$$

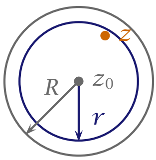
1.17 Potenzreihen *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$,*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,, \quad \textit{mit } \frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0.$$

Dann konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für $|z - z_0| < R$ und divergiert für $|z - z_0| > R$. Sie konvergiert gleichmäßig auf jedem Kreis $\overline{K_r(z_0)}$ mit $0 < r < R$. Insbesondere ist f stetig auf $K_R(z_0)$.



Falls

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

konvergent ist, gilt

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

1.18 Definition

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad \textit{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \quad \textit{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad \textit{für } z \in \mathbb{C}$$

Bemerkung: Exemplarisch für e^z:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$\implies R = \infty$, die Potenzreihe ist konvergent auf ganz $\mathbb{C}$. $\multimap$

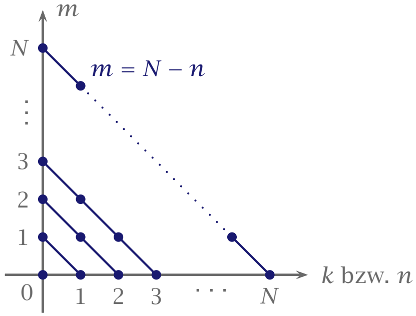
1.19 **Cauchy-Produkt von Reihen** *Ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent in* $\mathbb{C}$*, so gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

Beweis Seien

$$A \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,, \quad B \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,, \quad B_\ell \coloneqq \sum_{n=0}^{\ell} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \overset{m=n-k}{=} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-m} a_n b_m = \sum_{n=0}^{N} a_n \underbrace{\sum_{m=0}^{N-m} b_m}_{B_{N-m}-B+B}$$



$$\underset{n=N-\ell\,\ell=0,1,\dots,N}{\overset{l:=N-n}{=}} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N} a_{N-\ell}(B_\ell - B)}_{(*)\ \text{Z.Z.} \to 0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n B}_{\to A\cdot B}$$

$$(*) = \sum_{\ell=0}^{N_\varepsilon} a_{N-\ell}(B_\ell - B) + \sum_{\ell=N_\varepsilon+1}^{N} a_{N-\ell}(B_\ell - B)$$

1. Schritt: Wähle ein passendes N_ε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\ell=N_\varepsilon+1}^{N} a_{N-\ell}(B_\ell - B)\right| &\leq \sup_{\ell\geq N_\varepsilon+1} |B_\ell - B| \sum_{\ell=N_\varepsilon+1}^{N} |a_{N-\ell}| \\ &\leq \sup_{\ell\geq N_\varepsilon+1} |B_\ell - B| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{da } B_\ell \to B.\end{aligned}$$

2. Schritt: Abschätzen liefert

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\ell=0}^{N_\varepsilon} a_{N-\ell}(B_\ell - B)\right| &\leq \max_{0\leq\ell\leq N_\varepsilon} |B_\ell - B| \sum_{n=N-N_\varepsilon}^{\infty} |a_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } N - N_\varepsilon > \tilde{N}_\varepsilon \text{ da } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent.}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $|(*)| < \varepsilon$ für $N - N_\varepsilon > \tilde{N}_\varepsilon$ bzw. für $N > \tilde{N}_\varepsilon + N_\varepsilon$. ■

1.20 *Folgerung*

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w \qquad \text{für } z, w \in \mathbb{C}.$$

Beweis Wir verwenden die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

$$\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w = \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{a_n}\Bigg)\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{w^n}{n!}}_{b_n}\Bigg)$$

beide Reihen sind absolut konvergent

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}n! \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad \text{Binomischer Lehrsatz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \mathrm{e}^{z+w}\end{aligned}$$ ■

1.21 *Bemerkung:* Mit der Taylorreihe folgt, dass $\mathrm{e}^z\big|_{z=x\in\mathbb{R}}$, $\cos z\big|_{z=x\in\mathbb{R}}$ und $\sin z\big|_{z=x\in\mathbb{R}}$ dieselben Funktionen sind, wie die aus der Schule bekannten. ⊸

1.22 *Folgerung* **1.)** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ für $z \in \mathbb{C}$ (Eulersche Formel),

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2.) Mit der Polardarstellung: $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ gilt

$$\begin{aligned} z^n &= r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \end{aligned}$$

⊸

1.23 **Definition** **1.)** *$f : O \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in $z_0 \in O$, falls*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0 z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert; $f'(z_0)$ heißt Ableitung von f in z_0.

2.) *f heißt differenzierbar, falls f in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ differenzierbar ist. $f' : O \to \mathbb{C}$ heißt Ableitungsfunktion von f.* ⋊

1.24 ▶| *Beispiel* **1.)** Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto c$ ist $f'(z) = 0$.

2.) Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z$ ist $f'(z) = 1$.

3.) Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ ist $f'(z) = n\, z^{n-1}$.

4.) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto |z|^2$ ist in $z_0 \neq 0$ nicht differenzierbar.

Sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \neq 0$:

$$z_h = x_0 + h + \mathrm{i}y_0 \implies \frac{|z_h|^2 - |z_0|^2}{z_h - z_0} = \frac{2hx_0 + h^2}{h} \to 2x_0 \qquad (h \to 0),$$

$$z_h = x_0 + \mathrm{i}(y_0 + h) \implies \frac{|z_h|^2 - |z_0|^2}{z_h - z_0} = \frac{2hx_0 + h^2}{\mathrm{i}h} \to -\mathrm{i}2x_0 \qquad (h \to 0).$$ |◀

1.25 **Satz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : O \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

i.) *f ist differenzierbar in z_0 mit Ableitung $f'(z_0)$.*

ii.) $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathcal{O}(|z - z_0|)$.

BEWEIS **i.)** $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \to 0$ für $z \to z_0$.

ii.) $\dfrac{r(z)}{z - z_0} = \dfrac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)}{z - z_0} \to 0$ für $z \to z_0$. ■

1.26 **Satz** **1.)** *f differenzierbar in $z_0 \implies f$ stetig in z_0.*

2.) $(f+g)' = f' + g'$.

3.) $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.

4.) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$ *falls* $g(z_0) \neq 0$.

5.) $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$.

1.27 *Beispiel* **1.)** Polynomfunktionen sind differenzierbar auf $\mathbb{C}$ (folgt aus 1.24, 3.) und 1.26, 2.)).

2.) Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

1.28 **Definition** **1.)** *Sei $\gamma \in C^1([a,b] \to \mathbb{C})$ (also auch $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Im}\gamma \in C^1$). Dann heißt γ Weg von $z_1 = \gamma(a)$ nach $z_2 = \gamma(b)$. Falls $z_1 = z_2$, heißt γ geschlossen.*

2.) *Sei γ ein Weg und $f \in C(\operatorname{Bild}(\gamma) \to \mathbb{C})$. Dann heißt*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &:= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b [\operatorname{Re}(f(\gamma(t)))\operatorname{Re}(\gamma'(t)) - \operatorname{Im}(f(\gamma(t)))\operatorname{Im}(\gamma'(t))]\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \mathrm{i}\int_a^b [\operatorname{Im}(f(\gamma(t)))\operatorname{Re}(\gamma'(t)) + \operatorname{Re}(f(\gamma(t)))\operatorname{Im}(\gamma'(t))]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

das Integral von f längs γ.

1.29 *Bemerkung:* **1.)** Ist $\tilde{\gamma}$ eine andere Parametrisierung des Weges γ, sodass folgende Eigenschaften gelten

$$\begin{aligned}&\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \varphi)(s) \quad \text{für } a' \le s \le b', \\ &\varphi \in C^1([a',b'] \to [a,b]),\quad \varphi(a') = a,\ \varphi(b') = b.\end{aligned}$$

Dann folgt aus der Substitutionsregel für reelle Integration

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \left(t = \varphi(s), \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \varphi'(s)\right) \\ &= \int_{a'}^{b'} \underbrace{f(\gamma(\varphi(s)))}_{f(\tilde{\gamma}(s))}\,\underbrace{\gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{\gamma}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\gamma\circ\varphi)(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

2.) $-\gamma$ ist der zu γ entgegengesetzt orientierte Weg.

$$-\gamma(t) := \gamma(a+b-t)\,, \quad a \le t \le b.$$

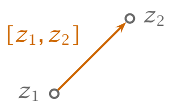
Es gilt

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3.) Jede Kurve kann so umparametrisiert werden, dass $a = 0$ und $b = 1$ gilt.

4.) Verbindungsstrecke: $\gamma = [z_1, z_2]$

$$\iff \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)\,, \quad 0 \le t \le 1$$



5.) Verallgemeinerung: Ein Weg kann auch nur stückweise C^1 sein.

$$\gamma \in C([a,b] \to \mathbb{C})$$

Es existieren $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, sodass

$$\gamma_j := \gamma\Big|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}).$$

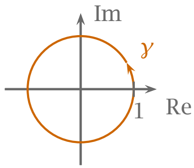
(das heißt, die Ableitung darf endlich viele Sprünge haben). Dann

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$ ⊸

1.30 ▶I *Beispiel* **1.)** $f(z) := z^3$, $\gamma = [0, 1+\mathrm{i}]$

$$\begin{aligned}\int_{[0,1+\mathrm{i}]} z^3\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (t(1+\mathrm{i}))^3\,(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t \\ &= (1+\mathrm{i})^4 \int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(1+\mathrm{i})^4}{4}\end{aligned}$$

2.) $f(z) \coloneqq \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Da $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ ist der Weg geschlossen.



$$\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$$

1.31 **Satz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $F : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $f \coloneqq F'$ in O (das heißt, F ist eine* Stammfunktion *von f). Ist γ ein Weg in O, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t)) &= \lim_{s \to t s \neq t} \frac{F(\gamma(s)) - F(\gamma(t))}{\gamma(s) - \gamma(t)} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \\ &= F'(\gamma(t))\,\gamma'(t) = f(\gamma(t))\,\gamma'(t) \end{aligned}$$

können wir die Kettenregel verwenden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{Re} F(\gamma(t)) + \mathrm{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{Im} F(\gamma(t)) \right] \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung im Reellen gilt

$$\begin{aligned} &= \Big(\operatorname{Re} F(\gamma(b)) + \mathrm{i} \operatorname{Im} F(\gamma(b))\Big) - \Big(\operatorname{Re} F(\gamma(a)) + \mathrm{i} \operatorname{Im} F(\gamma(a))\Big) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

■

1.32 *Folgerung* **1.)** Besitzt f eine Stammfunktion und ist γ geschlossen, so folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

2.) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto \dfrac{1}{z}$ besitzt keine Stammfunktion (siehe 1.30, 2.)). ⊸

1.33 **Satz** *Sei γ ein Weg, $f \in C(\mathrm{Bild}(\gamma) \to \mathbb{C})$. Dann*

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_a^b |f(\gamma(t))|\;|\gamma'(t)|\;\mathrm{d}t\\ &\le \max_{a\le t\le b} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)|\;\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Beweis Es gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

mit $\varphi = -\arg\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right)$

$$\begin{aligned}&= \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\,\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_a^b \left|\,\mathrm{Re}\,\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)\right|\;\mathrm{d}t\\ &\le \int_a^b \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right|\;\mathrm{d}t\\ &\le \int_a^b \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right|\;|f(\gamma(t))|\;|\gamma'(t)|\;\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Genau so, falls γ nur stückweise C^1. ■

1.34 **Definition**

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b |\gamma'(t)|\;\mathrm{d}t$$

heißt Länge von γ. Damit wird 1.33 zu

$$|\textit{Integral von } f \textit{ über } \gamma| \le (\textit{Länge von } \gamma)\;(\max|f| \textit{ auf } \gamma)\,.$$ ⋊

1.35 ▶| *Beispiel* **1.)** $\gamma \coloneqq [z_1, z_2]$, $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$

$$L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| \, \mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$$

2.) $\gamma \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$

a.)

$$|2\pi\mathrm{i}| = \left| \int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z \right| \le \max_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\, 0\le t\le 2\pi} \left| \frac{1}{z} \right| \int_0^{2\pi} \left| \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \right| \, \mathrm{d}t = 2\pi$$

b.)

$$|0| = \left| \int_\gamma z \, \mathrm{d}z \right| \le \max_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} |z| \, 2\pi = 2\pi$$ |◀

1.36 **Satz** *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$. Dann ist*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,, \quad \textit{für } |z| < R$$

auf dem offenen Konvergenzkreis $\mathring{K}_R(0)$ beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \, z^{n-1} \,, \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \, n\,(n-1)\, z^{n-2} \,, \quad \ldots$$

BEWEIS Seien

$$g(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \, z^{n-1} \,, \quad R' \coloneqq \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \, n|}}$$

dann gilt

1.) $R' = R$ wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Das heißt: g ist auf demselben $K_R(0)$ definiert wie f.

2.) $g = f'$. Seien $w \in K_R(0)$, $z \in K_R(0) \setminus \{w\}$, so folgt

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n\, w^{n-1} \right)}_{(*)}$$

$$(*) = \left| \frac{1}{z-w} \int_{[w,z]} (n\,u^{n-1} - n\,w^{n-1}) \, \mathrm{d}u \right|$$
$$\le \frac{1}{|z-w|} L([w,z]) \, n \, |z^{n-1} - w^{n-1}|$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (*) \to 0 \,, & \text{für } z \to w \\ |a_n(\ldots)| \le n\,|z|^{n-1} + n\,|w|^{n-1} \end{cases}$$

Die Reihe konvergiert also gleichmäßig in $K_r(0)$ für jedes $r < R$. Der Grenzwert von $z \to w$ und die Reihe sind vertauschbar, also

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \to 0. \qquad \blacksquare$$

1.37 *Beispiel* **1.)**

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$(\mathrm{e}^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

2.)

$$\begin{aligned}(\cos z)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)' \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &\underset{n=k+1\,2n=2k+2}{\overset{k=n-1}{=}} -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= -\sin z, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

3.) Genauso für $(\sin z)' = \cos z$.

1.38 **Definition** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1] \to O)$. Dann heißen γ_1, γ_2 C^1-homotop in O, falls es eine Abbildung $\Phi \in C^1([0,1] \times [0,1] \to O)$ gibt, sodass*

$$\Phi(\cdot, 0) = \gamma_1, \quad \Phi(\cdot, 1) = \gamma_2$$

und eine der folgenden Bedingungen

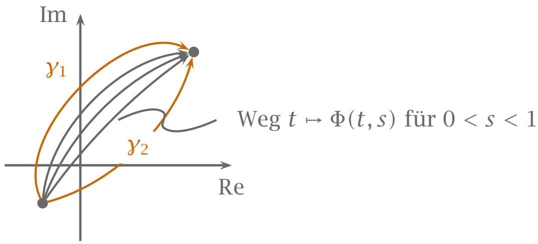
i.) *$\Phi(0,s) = \gamma_1(0)$, $\Phi(1,s) = \gamma_1(1)$ für $0 \leq s \leq 1$. Insbesondere folgt daraus, dass $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Die Kurven stimmen also in den Anfangs- und Endpunkten überein.*

ii.) *$\Phi(0,s) = \Phi(1,s)$ für $0 \leq s \leq 1$. γ_1 und γ_2 sind also geschlossen, ebenso die Wege $\beta_s := \Phi(\cdot, s)$.*

Wir schreiben $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ($\sim$ ist eine Äquivalenzrelation). Φ heißt Homotopie zwischen γ_1 und γ_2. Ein geschlossener Weg γ heißt nullhomotop, falls γ homotop zu einem konstanten Weg ist.

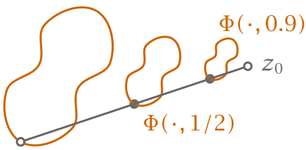
1.39 ▶| *Beispiel* **1.)** **a.)** $O = \mathbb{C}$. Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1] \to \mathbb{C})$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, dann gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2$:

$$\Phi(t,s) \coloneqq \gamma_1(t) + s\,\underbrace{(\gamma_2(t) - \gamma_1(t))}_{=0 \text{ für } t=0, t=1}$$



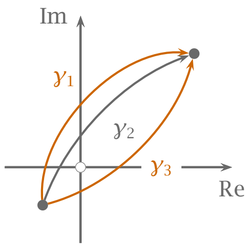
b.) Jeder geschlossene Weg $\gamma \in C^1([0,1] \to \mathbb{C})$ ist in $O \subseteq \mathbb{C}$ nullhomotop: Sei $\gamma_2(t) \coloneqq z_0 \in \mathbb{C}$ fest.

$$\Phi(t,s) \coloneqq \gamma(t) + s(z_0 - \gamma(t))$$



2.) $O = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

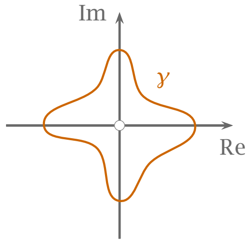
a.)



Offensichtlich: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, aber nicht $\gamma_1 \sim \gamma_3$ und auch nicht $\gamma_2 \sim \gamma_3$, weil wir über die 0 hinüber müssten.

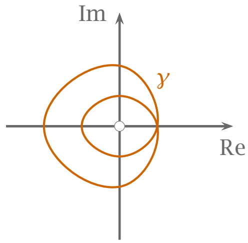
Anschaulich: Zwei Wege sind homotop, wenn »dazwischen« nur Elemente aus O liegen.

b.)



γ ist nicht nullhomotop, aber $\gamma \sim \tilde{\gamma} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\, t}$, $0 \leq t \leq 1$

c.)



$\gamma \sim \hat{\gamma} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\pi\, t}$, $0 \leq t \leq 1$. Zweimal durchlaufener Kreis.

1.2 Holomorphie und Analytizität

2.1 **Vereinbarung** *Zu $f : O \to \mathbb{C}$ setzen wir*

$$\tilde{O} \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \mathrm{i}y \in O\},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \tilde{O} \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) \\ \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) \end{pmatrix}.$$

f wird interpretiert als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. ⋊

2.2 **Satz** *$O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

i.) *f ist differenzierbar (in O).*

ii.) *f stetig (in O) und für alle Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1] \to O)$ gilt*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \implies \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

iii.) *f stetig und für alle $\gamma \in C^1([0,1] \to O)$ gilt*

$$\gamma \text{ nullhomotop} \implies \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

iv.) *Für jedes $z_0 \in O$ existiert $R > 0$, (a_n) Folge in $\mathbb{C}$, sodass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad \text{für } |z - z_0| < R.$$

v.) *f ist in O beliebig oft differenzierbar.*

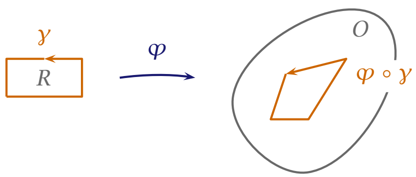
vi.) *$u, v \in C^1(\tilde{O} \to \mathbb{R})$ und u, v erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x\,, \quad \text{in } \tilde{O}.$$ $\rtimes$

2.3 **Definition** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$. Erfüllt f eine (und damit alle) Bedingungen aus 2.2, so heißt f holomorph (dies betont die beliebige Differenzierbarkeit) oder analytisch (dies betont iv.).* $\rtimes$

2.4 **Cauchy'scher Integralsatz für die Bilder von Rechtecken** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $R := [a,b] \times [c,d]$, $\varphi \in C^1(R \to O)$, γ die geschlossene Randkurve von R (stückweise C^1). Dann*

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



Beweis **1.)** $\varphi \in C^1(R \to O) \implies \varphi \circ \gamma$ ist stückweise C^1, also ein Weg in O.

2.) Da R kompakt und $\partial_1 \varphi$ und $\partial_2 \varphi$ stetig auf R:

$$|\nabla \varphi| = \left| \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix} \right| \le c \quad (\le \infty) \quad \text{auf } R.$$

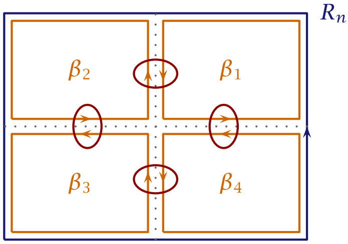
3.) Konstruiere eine Folge (R_n) von Rechtecken mit Randkurven γ_n:

$$R_0 := R\,, \quad \gamma_0 = \gamma.$$

Teile R_n durch Seitenhalbierung in vier Rechtecke. Wähle als R_{n+1} dasjenige der vier, für das

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma_{n+1}} f(z) \, \mathrm{d}z \right|$$

am größten ist.



Integrale über die rot markierten Teile heben sich gegenseitig weg.

$$\int_{-\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Daraus folgt

$$\int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \int_{\varphi \circ \beta_j} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Weiterhin folgt

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\varphi \circ \gamma_{n+1}} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq 4 \left| \int_{\varphi \circ \gamma_{n+1}} f(z) \, \mathrm{d}z \right|.$$

Durch vollständige Induktion zeigt sich

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma_0} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) \, \mathrm{d}z \right|.$$

4.) Sei x_n der Mittelpunkt von R_n, dann gilt

$$\forall\, x \in R_n : |x - x_n| < L(\gamma_n) \leq \frac{1}{2^n} L(\gamma_0).$$

Für $m \geq n$ folgt dann

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} L(\gamma_0)\,, \quad \text{da } R_m \leq R_n.$$

Also ist (x_n) Cauchy: $x_m \to y \in R_0$.

Für $m \geq n$ gilt $x_m \in R_n$, daraus folgt

$$|x_n - y| \leq \frac{1}{2^n} L(\gamma_0).$$

5.) Aus $x_n \to y \in R_0$ folgt mit der Stetigkeit von φ

$$\varphi(x_n) - \varphi(y) =: z_0 \in O$$

Sei nun $z = \varphi(x)$ mit $x \in R^n$, dann folgt

$$|\operatorname{Re}(z - z_0)| = |\operatorname{Re}\varphi(x) - \operatorname{Re}\varphi(y)|$$

und mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &= |\nabla(\operatorname{Re}\varphi)(\xi)(x-y)| \\ &\leq c|x-y| \leq c\,\frac{1}{2^n}L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Genauso für $\operatorname{Im} z$

$$|z - z_0| \leq \sqrt{2}\,c\,\frac{1}{2^n}L(\gamma_0).$$

6.) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z, z_0)$$

mit

$$\frac{|r(z,z_0)|}{|z - z_0|} < \varepsilon \quad \text{für } |z - z_0| < \delta$$

Für $n \geq N_\delta$ und gilt

$$|z - z_0| < \delta \quad \forall\, z \in \varphi(R_n)$$

Bemerkung: $|z_n - z_0| < \dfrac{\delta}{2}$ für $n \geq \tilde{N}_\delta$

$$|z - z_n| = |\varphi(y) - \varphi(x_n)| \overset{5.}{\leq} c|y - x_n| \overset{4.}{<} \frac{\delta}{2} \text{ für } n > \tilde{\tilde{N}}_\delta \qquad \multimap$$

und somit

$$|r(z, z_0)| < \varepsilon|z - z_0| \overset{5.}{\leq} \sqrt{2}c\frac{\varepsilon}{2^n}L(\gamma_0)\,, \quad z, z_0 \in \varphi(R_n)$$

7.)

$$\left|\int_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \underbrace{\left|\int_{\varphi\circ\gamma_n} \underbrace{\big(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\big)}_{\text{Besitzt Stammfunktion}}\,\mathrm{d}z\right|}_{=0 \text{ da } \varphi\circ\gamma_n \text{ geschlossen}} + \left|\int_{\varphi\circ\gamma_n} r(z,z_0)\,\mathrm{d}z\right|$$

$$\begin{aligned}
&\le L(\varphi\circ\gamma_n) \max_{z\in\mathrm{Bild}(\varphi\circ\gamma_n)} |r(z,z_0)| \\
&\le \int |(\varphi\circ\gamma_n)'(t)|\mathrm{d}t \max_{z\in\mathrm{Bild}(\varphi\circ\gamma_n)} |r(z,z_0)| \\
&\le \int |\varphi'(\gamma_n(t))|\,|\gamma_n'(t)|\mathrm{d}t \max_{z\in\mathrm{Bild}(\varphi\circ\gamma_n)} |r(z,z_0)| \\
&\le c\cdot L(\gamma_n) \max_{z\in\mathrm{Bild}(\varphi\circ\gamma_n)} |r(z,z_0)| \\
&\le \frac{c}{2^n} L(\gamma_0) \max_{z\in\mathrm{Bild}(\varphi\circ\gamma_n)} |r(z,z_0)| \\
&\overset{6.}{\le} \frac{c}{2^n} L(\gamma_0)\,\frac{\varepsilon}{2^n} L(\gamma_0)
\end{aligned}$$

$$\overset{3.}{\Longrightarrow} \left|\int_{\varphi\circ\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n \left|\int_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le c\,\varepsilon\,L(\gamma_0)^2 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

■

2.5 *Folgerung* Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ in O. Dann

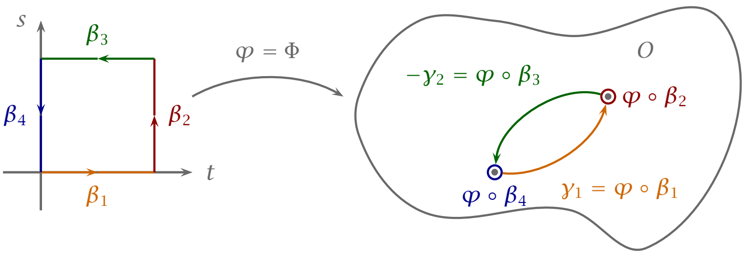
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

BEWEIS Sei Φ die Homotopie, insbesondere

$$\Phi(t,0) = \gamma_1(t)\,, \quad \Phi(t,1) = \gamma_2(t)$$
$$\Phi \in C^1([0,1]\times[0,1] \to O)$$

Setze zur Anwendung von 2.4 $R := [0,1]\times[0,1]$, $\varphi := \Phi$.

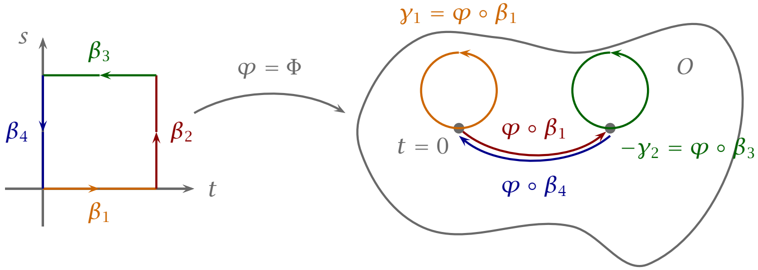
Fall 1: $\Phi(0,1) = \Phi(0,0)$ für $0 \le s \le 1$ und $\Phi(1,s) = \Phi(1,0)$



$$\overset{2.4}{\Longrightarrow} \int_{\varphi\circ\beta_1=\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\varphi\circ\beta_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0,\text{ da } \varphi\circ\beta_2=\text{const.}} + \underbrace{\int_{\varphi\circ\beta_3=-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=-\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z} + \underbrace{\int_{\varphi\circ\beta_4} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0,\text{ da } \varphi\circ\beta_4=\text{const.}} = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Fall 2: $\Phi(0,s) = \Phi(1,s)$ für $0 \le s \le t$



$$\overset{2.4}{\Longrightarrow} \int_{\varphi\circ\beta_1=\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi\circ\beta_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\varphi\circ\beta_3=-\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=-\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z} + \int_{\varphi\circ\beta_4=-\varphi\circ\beta_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \blacksquare$$

Teilbeweis 2.2 i. $\Longrightarrow$ ii.: f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig, benutze 2.5

ii. $\Longrightarrow$ iii.: γ nullhomotop $\Longrightarrow$ $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, da $\tilde{\gamma} = \text{const.}$, und aus 2.5 folgt

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,, \quad \text{da } \tilde{\gamma} = \text{const. (Integral über Punkt ist 0)} \qquad \blacksquare$$

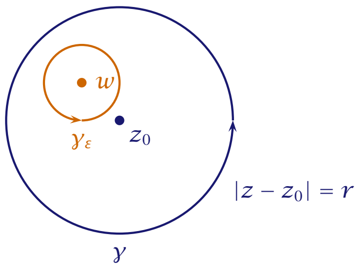
2.6 **Cauchy-Integralformel für die Kreisscheibe** *Kreisscheibe: Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$, $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$. Dann gilt*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z\,, \quad \textit{für } |w - z_0| < r$$

Vereinbarung: Das Integral ist zu verstehen längs der Kurve $\gamma : [0,1] \to O : t \mapsto z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t}$.

Insbesondere: Ist $f(z)$ auf dem Kreisrand bekannt, dann auch im Kreisinneren.

BEWEIS $\gamma_\varepsilon(t) := w + \varepsilon\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$, $0 \le t \le 1$



Offensichtlich: $\gamma \sim \gamma_\varepsilon$ in $O \setminus \{w\}$ und $f(z)/(z-w)$ ist differenzierbar in $O \setminus \{w\}$.

$$\overset{2.4}{\Longrightarrow} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \underbrace{\frac{f(z)-f(w)}{z-w}}_{|\cdot|\le c,\ \text{weil diffbar}}\,\mathrm{d}z}_{|\cdot|\le c\, L(\gamma_\varepsilon) = c\, 2\pi\varepsilon \to 0 \text{ für } \varepsilon\downarrow 0} + f(w) \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z}_{=2\pi \mathrm{i}}$$

$$\overset{\varepsilon\downarrow 0}{\Longrightarrow} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(w)$$

■

2.7 **Potenzreihenentwicklungssatz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$, $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$. Dann gibt es eine Folge $(a_n) \in \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{für } |z-z_0| < r$$

BEWEIS Sei $w \in K_r(z_0)$

$$f(w) \overset{2.6}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}z$$

Bemerkung: Die geometrische Reihe konvergiert, weil $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{|w-z_0|}{r} < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w-z_0|}{r}\right)^n \text{ konvergent}$$

$$\underset{1.15}{\overset{\text{Weierstraß}}{\Longrightarrow}} \text{Reihe gleichmäßig konvergent bezüglich } z$$

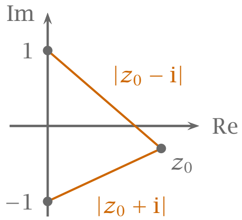
Reihe und Integral vertauschen

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz}_{a_n} \, (w-z_0)^n \qquad \blacksquare$$

2.8 *Folgerung* Unter diesen Voraussetzungen gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$R \geq \sup\{r > 0 : \overline{K_r(z_0)} \subseteq O\}$$

2.9 ▶ *Beispiel* $O = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$



Entwickle f um z_0 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Aus 2.8 folgt

$$R \geq \min\{|z_0 + i|, |z_0 - i|\}$$

Da $|f(z)| \to \infty$ für $z \to \pm i$ kann die Potenzreihe in $z = \pm i$ nicht konvergieren.

$$\implies R = \min\{|z_0 + i|, |z_0 - i|\}$$

2.10 *Folgerung* **1.)**

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \text{ für die } a_n \text{ in 2.7}$$

2.)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \overset{\text{Übung}}{\implies} a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$\implies f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz$$

Auf einer Kreisscheibe um z_0 gilt analog zur gewöhnlichen Cauchy-Integralformel (2.6) sogar allgemeiner:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, dz \qquad |w - z_0| < r$$

(Verwende dazu $z_0 := w$ und $r := |w - z_0|$, sowie die Weghomotopie beider Kurven auf der Kreisscheibe) Man nennt diese Form auch *Erweiterte Cauchy'sche Integralformel*.

2.11 **Definition** *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so heißt f ganze Funktion. Dann gilt mit beliebigem $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit Konvergenzradius $R = \infty$, a_n gegeben durch 2.10 ⋊

2.12 ▶| *Beispiel* $\mathrm{e}^{(\cdot)}$, Polynomfunktionen, sin, cos sind ganz. |◀

Teilbeweis 2.2 i. $\implies$ iv.

$$\begin{aligned} & z_0 \in O\,, \quad O \text{ offen} \\ \implies & \exists\, r > 0 : K_r(z_0) \subseteq O \\ \implies & \overline{K_{r/2}(z_0)} \subseteq K_r(z_0) \subseteq O \\ \overset{2.7}{\implies} & \text{iv. mit } R \geq \frac{r}{2} \end{aligned}$$

iv. $\implies$ v.: 1.36

v. $\implies$ i.: offensichtlich ■

2.13 **Cauchy-Abschätzung für Taylor-Koeffizienten** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$, $|f(z)| \leq M$ auf $|z - z_0| = r$ und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad \text{für } |z - z_0| < r$$

Dann

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = |a_n| \leq \frac{M}{r^n}\,, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis

$$\begin{aligned} |a_n| &\overset{2.10}{=} \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} \underbrace{\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}}_{|\cdot| \leq \frac{M}{r^{n+1}}} \,\mathrm{d}z \right| \\ &\overset{1.33}{\leq} \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \underbrace{L(|z - z_0| = r)}_{2\pi r} \\ &= \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$ ■

2.14 **Satz von Liouville** *Jede ganze Funktion, die beschränkt ist, ist konstant.*

Beweis Aus 2.11

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Aus 2.13

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \text{ wobei } |f(z)| \leq M \,, \quad \overline{K_r(0)} \subseteq \mathbb{C}$$

Dann folgt mit $r \to \infty$

$$\implies a_n = 0 \,, \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$
$$\implies f(z) = a_0 + 0 \,, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

∎

2.15 **Riemannscher Hebbarkeitssatz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in O$, $f : O \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, und*

$$\exists r > 0 \, \exists M > 0 : |f(z)| \leq M \,, \quad \text{für } 0 < |z - z_0| < r$$

Dann kann f in $z = z_0$ holomorph ergänzt werden, d.h. es existiert $a \in \mathbb{C}$, so dass

$$\tilde{f} : O \to \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} a & z = z_0 \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

differenzierbar ist.

Beweis Setze

$$g(z) := \begin{cases} 0 & z = z_0 \\ (z - z_0)^2 f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist g in $O \setminus \{z_0\}$ differenzierbar und auch in z_0

$$\lim_{z \to z_0 z \neq z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0 z \neq z_0} \underbrace{(z - z_0)}_{\to 0} \overbrace{f(z)}^{\text{beschränkt}} = 0$$

Bemerkung: Beschränkte Folge mal Nullfolge ergibt Nullfolge ⊸

$$\implies g \text{ differenzierbar in } O \,, \quad g(z_0) = g'(z_0) = 0$$
$$\overset{2.2,\text{ i.} \implies \text{iv.}}{\implies} g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad |z - z_0| \leq r$$

weil $a_0 = g(z_0) = 0$ und $a_1 = g'(z_0) = 0$, folgt

$$\implies g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad |z - z_0| < r$$

$$\implies f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}\,, \quad \text{für } 0 < |z - z_0| < r$$

Setze $a \coloneqq a_2$ für Definition von $\tilde{f}$

$$\implies \tilde{f}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}\,, \quad |z - z_0| < r$$

also differenzierbar in O. ■

2.16 *Beispiel* $f : O \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{sonst} \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

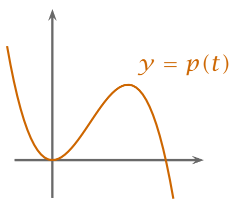
Somit ist g holomorph auf O.

2.17 **Hilfssatz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ erfülle iii. aus 2.2. Dann: Ist $D \subseteq O$ eine abgeschlossene Dreiecksfläche mit geschlossener Randkurve ∂D (stückweise Intervalle), so gilt*

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis Hauptidee: ∂D umparametrisieren zu einer C^1-Kurve

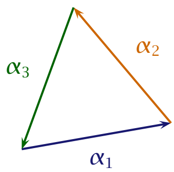
$$p(t) \coloneqq 3t^2 - 2t^3$$



$$\implies \begin{cases} p(0) = 0\,, & p(1) = 1 \\ p'(t) > 0\,, & \text{für } 0 < t < 1 \\ p'(0) = 0\,, & p'(1) = 0 \end{cases}$$

Sei $\partial D : [0,3] \to O$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & 0 \le t \le 1 \\ \alpha_2(t) & 1 \le t \le 2 \\ \alpha_3(t) & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$



Sei $\beta_1(t) \coloneqq \alpha_1(p(3t))$, $0 \le t \le 1/3$

$$\implies \int_{\beta_1} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{1.28}{=} \int_{\alpha_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,, \quad \beta_1'(0) = 0,\ \beta_1'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Genauso

$$\beta_2(t) \coloneqq \alpha_2\left(1 + p\left(3\left(t - \frac{1}{3}\right)\right)\right)\,, \quad \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3},\ \beta_2'\left(\frac{1}{3}\right) = 0,\ \beta_2'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\beta_3(t) \coloneqq \alpha_3\left(2 + p\left(3\left(t - \frac{2}{3}\right)\right)\right)\,, \quad \frac{2}{3} \le t \le 1$$

Setze

$$\tilde{\gamma}(t) \coloneqq \begin{cases} \beta_1(t) & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \beta_2(t) & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ \beta_3(t) & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\implies \tilde{\gamma} \in C^1([0,1] \to \mathbb{C}) \text{ ist Randkurve von } D$$

Dann ist $\tilde{\gamma}$ nullhomotop:

$$\Phi(t,s) \coloneqq \underbrace{(1-s)\tilde{\gamma}(t) + s\tilde{\gamma}(0)}_{\in D \subseteq O \text{ da } D \text{ konvex}}\,, \quad \Phi \in C^1$$

$$\implies \tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}(0), \text{ also } C^1\text{-nullhomotop}$$

$$\overset{\text{iii. von 2.2}}{\implies} \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$ ■

2.18 Satz von Morera *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$ stetig und für jede abgeschlossene Dreiecksfläche $D \subseteq O$ gelte*

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Dann ist f holomorph auf O.

BEWEIS Idee: Zeige, dass f in einem Kreis $K_r(z_0)$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$ eine Stammfunktion F besitzt. Wähle $z_0 \in O$ und $K_r(z_0)$.

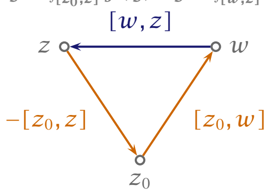
Setze

$$F(z) \coloneqq \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,, \quad \text{für } z \in K_r(z_0)$$

Behauptung: $F' = f$ in $K_r(z_0)$. Sei $z \in K_r(z_0)$.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \\
&= \left|\frac{1}{w-z}\left(\int_{[z_0,w]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[z,w]} f(z)\,\mathrm{d}\zeta \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + \int_{[w,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{[z,w]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right)\right|
\end{aligned}$$

1 Es gilt anschaulich $\int_{[z_0,w]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|w-z|}\left|\int_{[z,w]} \big(f(\zeta)-f(z)\big)\,\mathrm{d}\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{|w-z|}\underbrace{\max_{\zeta\in[z,w]}\big|f(\zeta)-f(z)\big|}_{<\varepsilon \text{ für } |w-z|<\delta,\text{ da } f \text{ stetig}}\ \underbrace{L([z,w])}_{=|w-z|} \\
&< \varepsilon\,, \quad \text{für } |w-z| < \delta
\end{aligned}$$

Damit gilt $F' = f$. F ist demnach differenzierbar auf $K_r(z_0)$, also nach 2.2 beliebig oft differenzierbar. Also ist auch f (beliebig oft) differenzierbar auf $K_r(z_0)$. Da $z_0 \in O$ beliebig gewählt war, ist f auf ganz O differenzierbar und damit holomorph. ■

TEILBEWEIS 2.2 iii. $\overset{2.17}{\Longrightarrow}$ Vorraussetzung von Morera erfüllt.

$\overset{\text{Morera}}{\Longrightarrow}$ i. f differenzierbar in O. ■

2.19 *Bemerkung:* **1.)** Beweis von Morera zeigt

$$f \text{ differenzierbar} \iff f \text{ besitzt eine lokale Stammfunktion}$$
$$\forall\, z_0 \in O\ \exists\, r > 0\ \exists\, F : F' = f \text{ in } K_r(z_0)$$

2.) Wenn f differenzierbar in O ist, muss f nicht unbedingt eine globale Stammfunktion (Stammfunktion auf O) besitzen: Z.B. $O = K_1(0) \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$.

Später: Stammfunktionen können holomorph fortgesetzt werden. Z.B. $\ln z$ als Stammfunktion von $1/z$. ⊸

2.20 **Satz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in O$*

$$\begin{aligned} \tilde{O} &\coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in O\} \\ u(x,y) &\coloneqq \operatorname{Re} f(x+iy) \\ v(x,y) &\coloneqq \operatorname{Im} f(x+iy) \end{aligned}$$

Es sind äquivalent

i.) *f ist differenzierbar in z_0.*

ii.) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *ist differnzierbar in (x_0, y_0) und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Sind die Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -\operatorname{Im} f'(z_0). \end{aligned}$$

BEWEIS

$$\iff f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|)$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0) + \operatorname{Re} f'(z_0) \operatorname{Re}(z-z_0) - \operatorname{Im} f'(z_0) \operatorname{Im}(z-z_0) \\ \qquad\qquad +o(|z-z_0|) \\ \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0) + \operatorname{Im} f'(z_0) \operatorname{Re}(z-z_0) - \operatorname{Re} f'(z_0) \operatorname{Im}(z-z_0) \\ \qquad\qquad +o(|z-z_0|) \end{cases}$$

Sei $z = x + iy$, dann zerfallen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z-z_0) &= x - x_0 \\ \operatorname{Im}(z-z_0) &= y - y_0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| \right)$$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist differenzierbar in (x_0,y_0) mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(x_0,y_0)$$ ■

RESTBEWEIS 2.2 vi. $\Longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \tilde{O} \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. $\overset{2.20}{\Longrightarrow}$ i.

i. $\overset{2.20}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ differenzierbar in O und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

$\Longrightarrow$ v. $\Longrightarrow$ f' stetig $\overset{2.20}{\Longrightarrow}$ u_x, u_y, v_x, v_y stetig

$\Longrightarrow$ vi. ■

2.21 ▶| *Beispiel* Sei $O = \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})$. Zum selbst nachrechnen

$$= \underbrace{\cosh y \sin x}_{u(x,y)} + \mathrm{i} \underbrace{\sinh y \cos x}_{v(x,y)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \cosh y \cos x \\ v_y &= \cosh y \cos x \end{aligned}\right\} » = «$$

$$\left.\begin{aligned} u_y &= \sinh y \sin x \\ v_x &= -\sinh y \sin x \end{aligned}\right\} » = «$$ |◀

2.22 **Definition** **1.)** *$M \subseteq \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhängend, falls gilt*

$$\forall z_0, z_1 \in M\, \exists \gamma : [a,b] \to M \text{ Weg stückweise } C^1 : \gamma(a) = z_0 \vee \gamma(b) = z_1$$

2.) *$G \subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet, falls G offen und wegzusammenhängend.* ⋊

2.23 **Satz** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph in G mit $f' = 0$ in G. Dann ist f konstant in G.*

BEWEIS Sei $z_0 \in G$ fest, $z \in G$, γ Weg von z_0 nach z.

$$0 = \int_\gamma f'(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = f(z) - f(z_0)$$

$$\Longrightarrow \forall z \in G : f(z) = f(z_0)$$ ■

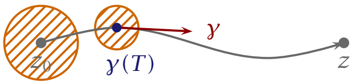
2.24 Satz *Sei $G \in \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph in G*

$$\exists\, z_0 \in G\ \forall\, n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) = 0$$

Damit ist f konstant in G.

Beweis Sei $z \in G$, γ ein Weg von z_0 nach z: $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$. Setze

$$T \coloneqq \sup \left\{ t \in [a,b] : f \circ \gamma \Big|_{[a,t]} = \text{const.} \right\} \neq \emptyset, \text{ da } t = a \text{ enthalten.}$$



1.) Zeige $T > a$

2.) Zeige $T = b$ (Dann $f(z) = f(z_0)\ \forall\, z \in G$)

Zu 1.

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{2.7}{\underset{2.10}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \text{für } |z-z_0| < R \\ &= f(z_0) \end{aligned}$$

$$\gamma \text{ stetig} \implies \exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in [a, a+\delta[: |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a)}_{=z_0}| < R$$

$$\implies T \geq a + \delta > a$$

Zu 2.: Annahme: $T < b$. Behauptung

$$f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, a \leq t \leq T$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} f'(\gamma(t)) &= \lim_{z \to \gamma(t)} \frac{f(z) - f(\gamma(t))}{z - \gamma(t)} \\ &\overset{\text{Teilfolge}}{=} \lim_{s \to t s \in [a,T]} \frac{f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))}{\gamma(s) - \gamma(t)} \overset{f|_{[a,T]}}{=} 0 \end{aligned}$$

Induktionsschritt genauso.

$$\implies \forall\, n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(\gamma(T)) = 0$$

$$\overset{\text{wie 1.}}{\implies} f(z) = f(\gamma(T)) = f(z_0) \text{ für } |z - \gamma(T)| < R$$ ■

1.3 Nullstellen

3.1 **Defintion** *Sei $O \to \mathbb{C}$ offen, f holomorph in O, $z_0 \in O$, $f(z_0) = 0$. Falls*

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

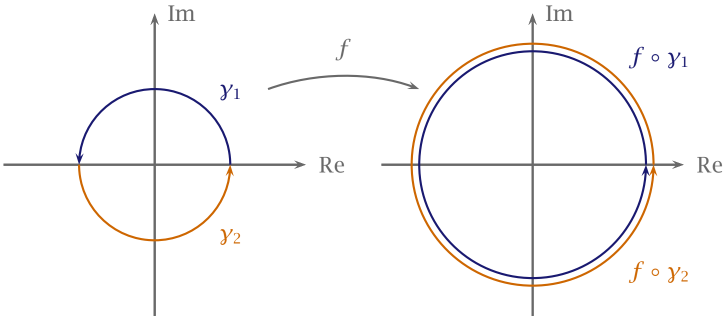
so heißt

$$K \coloneqq \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle z_0. Andernfalls heißt die Ordnung der Nullstelle unendlich. ⋊

Betrachte:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2 : r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mapsto r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$$



Offensichtlich ist f nicht injektiv. Jedes Element $w \neq 0$ hat genau zwei Urbilder.

Abhilfe: *Riemannsche Fläche*. Lege zwei $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Ebenen übereinander, schneide sie jeweils an der positiven reellen Achse auseinander, verbinde den Rand für $\operatorname{Im} z \uparrow 0$ der unteren Ebene mit dem Rand $\operatorname{Im} z \downarrow 0$ der oberen, verbinde die beiden anderen Ränder. Dann ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to F = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : r > 0, \varphi \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi + 2\pi} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi+4\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\}$$

bijektiv. Die Riemannsche Fläche hat zwei Blätter.

▶| *Beispiel*

$$f(z) = \sin z^2$$

Nullstelle bei $z = 0$

$$f'(0) = 2z\cos z^2\Big|_{z=0} = 0$$

$$f''(0) = 2\cos z^2 - 4z^2 \sin z^2\Big|_{z=0} = 2$$

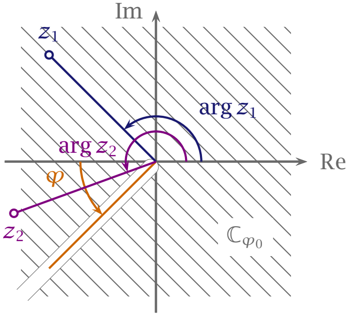
$z = 0$ ist Nullstelle 2. Ordnung. |◀

Ziel: Ist z_0 Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, so verhält sich f und ihre »Umkehrfunktionen« lokal wie

$$z \mapsto (z - z_0)^k$$

und ihre »Umkehrfunktionen«. ⊸

3.2 **Hilfssatz** *Sei* $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\mathbb{C}_{\varphi_0} := \{re^{i\varphi} : r > 0, -\pi+\varphi_0 < \varphi < \pi+\varphi_0\} = \mathbb{C}\setminus\{re^{i(\varphi_0+\pi)} : r > 0\}$



$$\arg_{\varphi_0}(z) := \begin{cases} \arg z & -\pi + \varphi_0 < \arg z < \pi \\ \arg z + 2\pi & -\pi \leq \arg z < -\pi + \varphi_0 \end{cases}$$

Dann ist $\arg_{\varphi_0} : \mathbb{C}_{\varphi_0} \to]-\pi + \varphi_0, \pi + \varphi_0[$ *stetig.*

Beweis $z \mapsto 1/|z|$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$ sind stetig auf $\mathbb{C}_{\varphi_0}$.

$$\arg_{\varphi_0}(z) = \begin{cases} \arccos \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \text{ (evtl. } + 2\pi) & \text{für } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \arcsin \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} \text{ (evtl. } + 2\pi) & \text{für } \operatorname{Re} z \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \text{ (evtl. } + 2\pi) & \text{für } \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$$

Jede einzelne Zeile ist stetig und die Bereiche überlappen sich. Also ist $\arg_{\varphi_0}$ stetig auf der Vereinigung der einzelnen Bereiche. ■

3.3 **Satz** *Sei* $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{C}_{\varphi_0} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$z^{1/k} := \sqrt[k]{z} := |z|^{1/k} e^{i\frac{1}{k}\arg_{\varphi_0} z}$$

Dann ist $\sqrt[k]{\cdot}$ *holomorph und*

$$(\sqrt[k]{z})^k = z \qquad \sqrt[k]{z}' = \frac{1}{k(\sqrt[k]{z})^{k-1}}$$

Beweis **1.)** $\sqrt[k]{\cdot}$ ist stetig als Kombination stetiger Funktionen

2.) $\sqrt[k]{\cdot}$ ist injektiv, denn

$$(\sqrt[k]{z})^k = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg_{\varphi_0} z} = z$$

3.) Ableitung: Sei $z_0 \in \mathbb{C}_{\varphi_0}$, $f(z) := z^k$

$$\begin{aligned}
\sqrt[k]{z}'\Big|_{z=z_0} &= \lim_{z\to z_0 z\neq z_0} \frac{\sqrt[k]{z} - \sqrt[k]{z_0}}{z - z_0} \\
&\overset{g:=\sqrt[k]{\cdot}}{=} \lim_{z\to z_0 z\neq z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0 z\neq z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{f(g(z)) - f(g(z_0))} \\
&= \lim_{z\to z_0 z\neq z_0} \frac{1}{\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{\zeta\to g(z_0)\zeta\neq g(z_0)} \frac{f(\zeta) - f(g(z_0))}{\zeta - g(z_0)}} \\
&= \frac{1}{f'(g(z_0))} \overset{f'(z)=kz^{k-1}}{=} \frac{1}{k(\sqrt[k]{z})^{k-1}}
\end{aligned}$$ ■

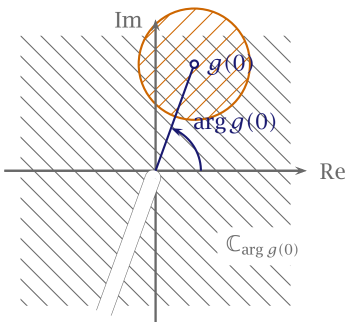
3.4 **Satz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in O, $z_0 \in O$ Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert $r > 0$ und eine holomorphe Funktion $h : K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit*

$$h(z_0) = 0\,, \quad h'(z_0) \neq 0\,, \quad f(z) = h(z)^k \text{ für } |z - z_0| < r$$

Beweis O.B.d.A.[1]: $z_0 = 0$, und weil $f^{(j)} = 0$, $j = 0, \dots, k-1$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = z^k \underbrace{\left(a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^{n-k}\right)}_{=:g(z)}, \quad \text{für } |z| < R$$

Dann ist g holomorph in $K_r(0)$, $g(0) = a_k \neq 0$.



[1]Ohne Bedenken des Autors

Da g stetig ist:

$$\exists r > 0 : |z| < r \implies |g(z) - g(0)| < \frac{|g(0)|}{2}$$

Dann folgt:

$$|z| < r \implies g(z) \in \mathbb{C}_{\arg g(0)}$$

Definiere

$$h(z) \coloneqq z \sqrt[k]{g(z)}\,, \quad \text{für } |z| < r$$

Dann:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \sqrt[k]{g(0)} = 0 \\ h'(0) &= 1 \underbrace{\sqrt[k]{g(0)}}_{\neq 0} + 0 \frac{1}{k(\sqrt[k]{g(0)})^{k-1}} \neq 0 \end{aligned}$$

h ist holomorph auf $K_r(0)$ als Produkt und Verkettung holomorpher Funktionen. ■

3.5 ▶| *Beispiel* Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^z$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= |\mathrm{e}^z| = \left|\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z}\right| = \left|\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\right| \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i} \operatorname{Im} z}\right| \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} > 0 \end{aligned}$$

Trotzdem ist f nicht injektiv:

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$$

|◀

3.6 **Lokale Umkehrfunktion** *Sei f holomorph in O und $z_0 \in O$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert $r > 0$, sodass $f\big|_{K_r(z_0)}$ injektiv ist. Weiter gelten*

- $f(K_r(z_0))$ *ist offen*
- $f^{-1} : f(K_r(z_0)) \to K_r(z_0)$ *ist holomorph*
- $(f^{-1}(w))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ *für $w \in f(K_r(z_0))$*

Beweis Seien

$$\begin{aligned} u(x,y) &\coloneqq \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) \\ v(x,y) &\coloneqq \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} f(z) = w_1 + \mathrm{i}w_2 &\iff \begin{cases} \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) = w_1 \\ \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y) = w_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} g_1(x,y,w_1,w_2) \coloneqq u(x,y) - w_1 = 0 \\ g_2(x,y,w_1,w_2) \coloneqq v(x,y) - w_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Es gelten

1.) $g_1, g_2 \in C^1(\cdot)$

2.) und

$$\begin{vmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} f' & -\operatorname{Im} f' \\ \operatorname{Im} f' & \operatorname{Re} f' \end{vmatrix}$$
$$= |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

3.) $g_j(x_0, y_0, \underbrace{\operatorname{Re} f(z_0)}_{u(x_0,y_0)}, \underbrace{\operatorname{Im} f(z_0)}_{v(x_0,y_0)}) = 0$. Also $(x_0, y_0, \operatorname{Re} f(z_0), \operatorname{Im} f(z_0))$ ist eine Lösung.

Satz über implizite Funktionen *Es existiert eine Umgebung $\tilde{U}$ von $(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$ im $\mathbb{R}^2$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\tilde{U} \to \mathbb{R})$ mit*

$$g_j(\varphi_1(w_1,w_2), \varphi_2(w_1,w_2), w_1, w_2) = 0\,, \quad j = 1, 2$$

und diese Lösungen sind eindeutig in einer Umgebung $\tilde{V}$ von (x_0, y_0). ⋊

Setze

$$V := \{x + \mathrm{i}y : x, y \in \tilde{V}\} \implies \begin{cases} f\big|_V \text{ ist injektiv} \\ f^{-1}(w_1,w_2) = \varphi_1(w_1,w_2) + \mathrm{i}\varphi_2(w_1,w_2) \\ f^{-1} \text{ ist stetig, da } \varphi_1, \varphi_2 \text{ stetig} \end{cases}$$

$\implies \exists r > 0 : K_r(z_0) \subseteq V$, da V Umgebung von z_0. Wir wissen:

$$f(f^{-1}(w)) = w$$
$$\implies (f^{-1}(w))' = \lim_{u \to w} \frac{f^{-1}(u) - f^{-1}(w)}{u - w}$$
$$= \lim_{u \to w} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(u)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(u) - f^{-1}(w)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \blacksquare$$

3.7 **Blätterzahl einer Nullstelle** *Sei f holomorph in O, $z_0 \in O$ Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung O_ε von z_0 mit*

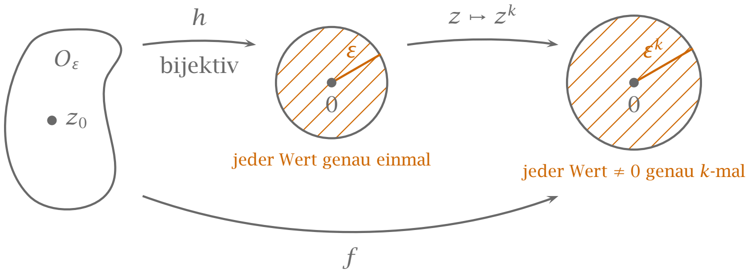
$$f(O_\varepsilon) = K_\varepsilon(0)$$

, sodass

$$f\big|_{O_\varepsilon} \text{ nimmt } \begin{cases} \text{jeden Wert } w \text{ mit } 0 < |w| < \varepsilon \text{ genau } k \text{ Mal an} \\ w = 0 \text{ genau ein Mal an} \end{cases}$$

BEWEIS 3.4 $\Rightarrow f(z) = h(z)^k$, h holomorph in $K_r(z_0)$ $h'(z_0) \neq 0$.

3.6 $\Rightarrow h\big|_{K_\delta(z_0)}$ injektiv, falls δ klein genug. Außerdem $h(K_\delta(z_0))$ offen. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(0) \subseteq h(K_\delta(z_0))$. Setze $O_\varepsilon := h^{-1}(K_\delta(z_0))$. Dann:



3.8 *Folgerung:* Nullstellen endlicher Ordnung sind isoloiert: Ist f holomorph in O, $z_0 \in O$ Nullstelle endlicher Ordnung, so gilt:

$$\exists\, \varepsilon\ \forall\, z \in K_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} : f(z) \neq 0$$ ⊸

3.9 **Satz von der inversen Abbildung** *Seien $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O_1 \to O_2$ holomorph und bijektiv. Dann*

- *$f'(z) \neq 0$ in O_1*
- *f^{-1} ist holomorph*
- $(f^{-1}(w))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$

BEWEIS Annahme: $\exists\, z_0 \in O_1 : f'(z_0) = 0$

$$g(z) := f(z) - f(z_0)$$

Also ist g holomorph und z_0 ist Nullstelle mindestens 2. Ordnung.

Fall 1: z_0 ist Nullstelle endlicher Ordnung

$\overset{3.7}{\Longrightarrow}$ g ist nicht injektiv.

$\Longrightarrow$ f ist nicht injektiv. ↯

Fall 2: z_0 ist Nullstelle der Ordnung ∞

$\overset{2.24}{\Longrightarrow}$ $g = \text{const. in } K_\varepsilon(z_0) \subseteq O_1$.

$\Longrightarrow$ $f = \text{const. in } K_\varepsilon(z_0) \subseteq O_1$. ↯

Rest aus 3.6 ■

3.10 **Identitätssatz** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f, g holomorph in G, (z_n) Folge in G, $z_n \to z_0 \in G$, $z_n \neq z_0$ für $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = g(z_n)$. Dann ist $f = g$ in G.*

Beweis Sei $h := f - g$ in G. Dann gilt h holomorph, $h(z_n) = 0$. Daraus folgt $h(z_0) = 0$. Wegen $h(z_n) = 0$, $z_n \to z_0$ und $z_n \neq z_0$ ist die Nullstelle z_0 nicht isoliert.

$\overset{3.10}{\Longrightarrow}$ z_0 ist Nullstelle der Ordnung ∞.

$\overset{2.24}{\Longrightarrow}$ $h = \text{const.}$ in G und $h(z_0) = 0 \implies h = 0$ in G, also $f = g$ in G. ∎

3.11 **Gebietstreue** *$G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph in G, $f \neq \text{const.}$. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis **1.)** $f(G)$ ist wegzusammenhängend: Seien $w_j = f(z_j) \in f(G)$, $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned} G \text{ Gebiet} &\implies \text{Es existiert ein Weg } \gamma \text{ in } G \text{ von } z_1 \text{ nach } z_2 \\ &\implies f \circ \gamma \text{ ist Weg von } w_1 \text{ nach } w_2 \text{ in } f(G) \end{aligned}$$

2.) $f(G)$ ist offen: Sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$.

$$g := f(z) - f(z_0)\,, \quad z \in G$$

$\implies$ g holomorph, z_0 Nullstelle.

Fall 1: z_0 hat Ordnung ∞

$\overset{2.24}{\Longrightarrow}$ $g = \text{const.}$, also $f = \text{const.}$ ↯

Fall 2: z_0 hat endliche Ordnung $k \in \mathbb{N}$

$\overset{3.7}{\Longrightarrow}$ $\exists\, O_\varepsilon \in G : K_\varepsilon(0) \subseteq \text{Bild}(g)$

$\implies$ $K_\varepsilon(f(z_0)) = f(z_0) \oplus K_\varepsilon(0) \subseteq \text{Bild}(f)$

$\implies$ $\exists\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(w_0) \subseteq f(G)$ ∎

Definition *K ist kompakt,* $\iff$

$$\forall\, (O_i)_{i \in I} \text{ offenes Mengensystem } : K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies \exists\, i_1, \ldots, i_n \in J : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j}$$

K ist folgenkompakt, $\iff$

$$\forall\, (x_n) \text{ Folge in K : Es existiert eine Teilfolge } (x_{n_k}) \text{ mit } x_{n_k} \to x \in K$$

H eine Borel $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann

$$\begin{aligned} K \text{ kompakt} &\iff K \text{ beschränkt und } K \text{ abgeschlossen} \\ &\implies \text{gilt immer} \\ &\impliedby \text{gilt nicht in } \infty\text{-dimensionalen Räumen} \end{aligned}$$

3.12 **Maximumprinzip I** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in G. Falls ein $z_0 \in G$ existiert, so dass*

$$\forall\, z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad (*)$$

oder

$$f(z_0) \neq 0 \;\wedge\; \forall\, z \in G : |f(z)| \geq |f(z_0)|$$

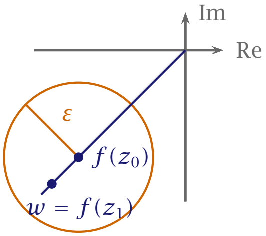
(d.h. f nimmt in G das Maximum oder Minimum $\neq 0$ an) Dann gilt $f = \text{const.}$ in G

Beweis Sei $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$ und f nicht konstant. Nach 3.11 ist $f(G)$ ein Gebiet und insbesondere offen, es existiert also $\varepsilon > 0$ mit

$$K_\varepsilon(f(z_0)) \subseteq f(G)$$

Wir finden jetzt anschaulich ein $w \in K_\varepsilon(f(z_0))$ mit $|w| > |f(z_0)|$. Da w im Bild von f liegt, existiert auch ein $z_1 \in G$ mit

$$|f(z_1)| = |w| > |f(z_0)|$$



Das stellt ein Widerspruch zur Vorraussetzung dar.

Den zweiten Fall behandelt man analog (die Forderung $f(z_0) \neq 0$ wird klar, weil man in diesem Fall keinen Widerspruch erzeugen kann). ■

3.13 **Maximumprinzip II** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, G beschränkt, $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig und f holomorph in G. Dann*

1.) $\exists\, z_1 \in \partial G\; \forall\, z \in \bar{G} : |f(z)| \leq |f(z_1)|$

2.) *Falls* $\min_{z \in \bar{G}} |f(z)| > 0$*:*

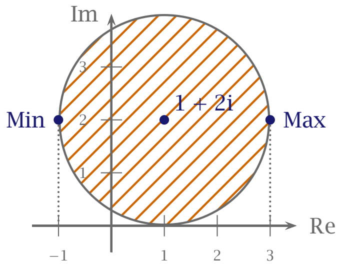
$$\exists\, z_2 \in \partial G\; \forall\, z \in \bar{G} : |f(z)| \geq |f(z_2)|$$

Beweis $\bar{G}$ ist kompakt und $|f| : \bar{G} \to \mathbb{R}$ stetig, also werden in $\bar{G}$ das Minimum z_1 und das Maximum z_2 in jedem Fall angenommen:

$$\exists\, z_1, z_2 \in \bar{G}\; \forall\, z \in \bar{G} : |f(z_2)| \leq |f(z)| \leq |f(z_1)|$$

Falls $z_1 \in \partial G$, sind wir schon fertig. Sei also $z_1 \in G$. Damit ist nach 3.12 f konstant in G und wegen der Stetigkeit auch in $\bar{G}$, also ist $z_1 \in \partial G$ wählbar. Genauso für z_2. ■

3.14 **Beispiel** Sei $f(z) = e^z$ und $G = K_2(1+2i)$ ein Gebiet. Für den Betrag von f gilt $|f(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.



Also werden Minimum und Maximum auf dem Rand von G (an den Punkten mit kleinstem, bzw. größtem Realteil) angenommen:

$$e^{-1} = |f(-1+2i)| \leq |f(z)| \leq |f(3+2i)| = e^3$$

3.15 **Satz** *Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, f in x_0 (reell-)analytisch, d.h.*

$$f(x) = y_0 + \sum_{n=K}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{für } |x-x_0| < r$$

($r > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{N}$, $a_K \neq 0$). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f_+ := f\Big|_{[x_0, x_0+\varepsilon[} \qquad f_- := f\Big|_{]x_0-\varepsilon, x_0]}$$

injektiv sind. f_+^{-1} und f_-^{-1} sind dann als Puiseux-Reihen darstellbar:

$$f_\pm^{-1}(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\pm|y-y_0|^{1/K}\right)^n \quad \text{für } y \in \begin{cases} f_+([x_0, x_0+\varepsilon[) \\ f_-(]x_0-\varepsilon, x_0]) \end{cases}$$

mit Koeffizienten $b_n \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $b_1 = |a_K|^{-1/K} \neq 0$.

Die Reihen für f_+ und f_- haben dieselben Koeffizienten b_n. Einziger Unterschied ist das Vorzeichen in der Klammer.

Beweis Wir nehmen o.B.d.A. $a_K > 0$ an. Definiere

$$g(z) := \sum_{n=K}^{\infty} a_n (z-x_0)^n \quad \text{für } |z-x_0| < r$$

$$\implies \begin{cases} g \text{ holomorph} \\ z = x_0 \text{ ist } K\text{-fache Nullstelle} \\ y_0 + g(x) = f(x) \text{ für } x_0 - r < x < x_0 + r \end{cases}$$

Nach 3.4 existiert $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion h mit $g(z) = h(z)^K$ für $|z-x_0| < \varepsilon$ und $h'(x_0) \neq 0$.

Aus dem Beweis von 3.4 entnehmen wir die Darstellung

$$h(z) = (z - x_0)\left(\sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - x_0)^{n-K}\right)^{1/K}$$

Diese Darstellung ist wohldefiniert in einer Umgebung um x_0, da dort

$$\sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - x_0)^{n-K} > 0$$

(betrachte für $z = x_0$ und folge aus der Stetigkeit). Man sieht, dass $h(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, wir können also h eingeschränkt auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ als reelle Funktion betrachten. Außerdem ist

$$h'(x_0) = 1 \cdot a_K^{1/K} + 0 \cdot \ldots = a_K^{1/K} > 0$$

Nach 3.6 ist dann h^{-1} definiert und holomorph in einer entpsrechenden Umgebung von x_0. Wir folgern weiter aus $h'(x_0) > 0$, dass h streng monoton wachsend in einer Umgebung von x_0 ist.

Da h^{-1} holomorph ist mit $h^{-1}(0) = x_0$, können wir für ein $r' > 0$ schreiben:

$$h^{-1}(z) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \qquad |z| < r'$$

Wir erhalten für die Koeffizienten der Potenzreihe

$$b_n = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} h^{-1}(0)$$

und damit als reelle Ableitungen von h^{-1} betrachtet: $b_n \in \mathbb{R}$. Für b_1 gilt außerdem

$$b_1 = (h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(x_0)} = \frac{1}{a_K^{1/K}}$$

Sei $y_0 \coloneqq f(x_0)$. Dann ist

$$f(x) = y \quad\Longleftrightarrow\quad g(x) = y - y_0 \quad\Longleftrightarrow\quad h(x)^K = y - y_0$$

Für $x \geq x_0$ ist (weil h streng monoton wachsend) $h(x) \geq h(x_0) = 0$ und damit

$$y = h(x)^K + y_0 \geq h(x_0)^K + y_0 = y_0$$

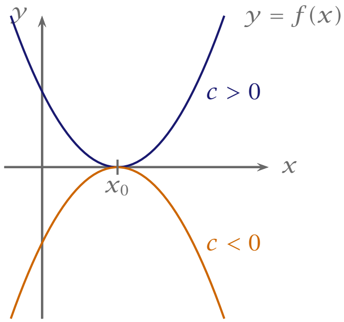
in diesem Fall ist $h(x) = (y - y_0)^{1/K}$ und damit

$$x = h^{-1}\left((y - y_0)^{1/K}\right) = \underbrace{x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left((y - y_0)^{1/K}\right)^n}_{=: f_+^{-1}}$$

Für $x \leq x_0$ ergibt sich umgekehrt $y \leq y_0$, $h(x) = -|y - y_0|^{1/K}$ und somit

$$x = h^{-1}\left(|y - y_0|^{1/K}\right) = \underbrace{x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(-|y - y_0|^{1/K}\right)^n}_{=: f_-^{-1}} \qquad \blacksquare$$

3.16 ▶| *Beispiel* Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=c(x-x_0)^4$ und $x_0\in\mathbb{R}$.



Fall $c < 0$:

$$
\begin{aligned}
&f_+ : [x_0,\infty[\to]-\infty,0] \\
&f_+^{-1}(y) = x_0 + \left|\frac{y}{c}\right|^{1/4} \\
&f_- :]-\infty,x_0] \to]-\infty,0] \\
&f_-^{-1}(y) = x_0 - \left|\frac{y}{c}\right|^{1/4}
\end{aligned}
$$

Für $c > 0$ ergeben sich dieselben Abbildungsvorschriften für f_+^{-1}, f_-^{-1}. |◀

1.4 Integrale längs geschlossener Kurven

4.1 ▶| *Beispiel*

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } |z|<r \\
g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad \text{für } |z|<R,\ \frac{1}{R}<r
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung: $\left|\frac{1}{z}\right| < R \iff |z| > \frac{1}{R}$ ⊸

Sei $h(z) := f(z) + g(1/z)$

$$
\implies \begin{cases} h \text{ holomorph im Kreisring } \frac{1}{R} < |z| < r \\ \text{Für } \frac{1}{R} < |z| < r \text{ gilt } h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \begin{cases} a_n & n \geq 0 \\ b_n & n \leq -1 \end{cases} \end{cases}
$$

|◀

4.2 Laurent-Entwicklung *Sei $0 \le r < R$ und*

$$K_{r,R}(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

und f holomorph in $K_{r,R}(z_0)$. Dann ist f als Laurent-Reihe darstellbar.

$$f(z) \coloneqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in K_{r,R}(z_0)$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \quad \text{für } r < \varrho < R$$

(Cauchy-Formel für Laurent-Koeffizienten).

$$H(z) \coloneqq \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Hauptteil,

$$N(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Nebenteil der Laurent-Reihe. ⋊

4.3 *Bemerkung:* **1.)** $r = 0$ ist erlaubt. Dann hat f in z_0 eine isolierte Singularität (siehe unten). Riemannscher Hebbarkeitssatz: Entweder ist f beschränkt bei z_0, dann ist es holomorph fortsetzbar in z_0, oder f ist unbeschränkt für $z \to z_0$.

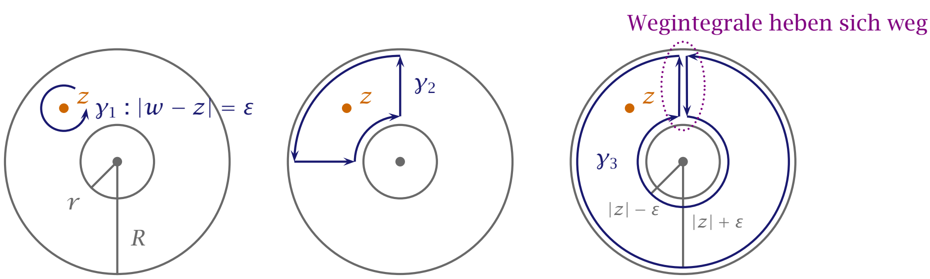
Im ersten Fall sei $\tilde{f}$ die holomorphe Fortsetzung. Für $n < 0$ gilt dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \underbrace{f(z)\,(z - z_0)^{-n-1}}_{\text{holomorph in } K_{r,R}(z_0)} \mathrm{d}z = 0$$

Damit ist der Hauptteil der Laurentreihe $H(z) = 0$.

2.) $N(z)$ konvergiert immer im ganzen äußeren Kreis $K_R(z_0)$. $H(z)$ konvergiert immer außerhalb des inneren Kreises: $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\} = \mathbb{C} \setminus \overline{K_r(z_0)}$. ⊸

Beweis von 4.2 O.B.d.A. $z_0 = 0$. Sei z aus $K_{r,R}(0)$ fest, $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2} \min\{R - |z|, |z| - r\}$



Es gilt: $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \gamma_3$ in $K_{r,R}(0) \setminus \{z\}$.

Cauchyscher Integralsatz (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Weil der innere Weg in mathematisch negativer Richtung durchlaufen wird erhält das zugehörige Interal ein negatives Vorzeichen

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|+\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|-\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|+\varepsilon} \frac{f(w)}{w} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{z}{w}}}_{=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z/w)^n \text{ gleichmäßig}} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|-\varepsilon} \frac{f(w)}{-z} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{w}{z}}}_{=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(w/z)^n \text{ gleichmäßig}} dw
\end{aligned}$$

Vertausche Integral und Summe

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|+\varepsilon=\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|-\varepsilon=\varrho} \frac{f(w)}{w^{-n}}\, dw\, z^{-n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw}_{=a_n \text{ für } n\in\mathbb{N}}\, z^n + \sum_{k=-1}^{-\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw}_{=a_k \text{ für } -k\in\mathbb{N}}\, z^k
\end{aligned}$$

■

4.4 **Definition** **1.)** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in O. Dann hat f in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus O$ eine isolierte Singularität, falls*

$$\exists\, r > 0 : K_{0,r}(z_0) \subseteq O$$

(mit anderen Worten: einzig z_0 ist nicht in O enthalten und z_0 ist komplett umhüllt von O)

2.) *f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Nach 4.2 gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{in } K_{0,r}(z_0)$$

a.) *Falls $H(z) = 0$, d.h. $a_n = 0$ für $n \leq -1$, heißt die Singularität hebbar.*

b.) *Falls $H(z)$ nur endlich viele Summanden hat und $H \neq 0$, also*

$$\exists\, N \leq -1 : (a_N \neq 0 \wedge \forall\, n < N : a_n = 0)$$

dann heißt z_0 Polstelle,

$$K := -\min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

heißt Ordnung des Pols.

c.) *Falls H unendlich viele Summanden hat*

$$\forall\, N \in \mathbb{Z}\, \exists\, n < N : a_n \neq 0$$

hat f in z_0 eine wesentliche Singularität ⋊

4.5 ▶| *Beispiel* **1.)** Sei $\varrho = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$f : O \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

hat wesentliche Singularität in $z_0 = 0$.

2.) Sei $f(z) \coloneqq \dfrac{p(z)}{q(z)}$ wobei p, q Polynome sind. Vereinfachungen:

1.) $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$, sonst Polynomdivision

2.) Seien $z_1, \ldots, z_n$ Nullstellen von q. Es soll $p(z_j) \neq 0$ sein ($j = 1, \ldots, n$), sonst gemeinsame Faktoren kürzen, eventuell holomorph ergänzen.

Partialbruchzerlegung:

$$q(z) = (z - z_1)^K \tilde{q}(z) \quad \tilde{q}(z) \neq 0$$

$$\implies \quad f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_j}{(z - z_1)^n}}_{\text{Hauptteil der Laurent-Reihe}} + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} \quad \text{mit } \mathrm{Grad}(\tilde{p}) < \mathrm{Grad}(\tilde{q})$$

$$\implies \quad f \text{ hat in } z_1 \text{ einen Pol der Ordnung } K$$ |◀

4.6 *Bemerkung:* f hat genau dann in z_0 einen Pol der Ordnung K, falls

$$f(z) = \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^K} \underbrace{\sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+K}}_{=g(z)}$$

das heißt, falls

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^K} g(z)$$

g holomorph in $K_\varepsilon(z_0)$ und $g(z) \neq 0$, weil $a_{-K} \neq 0$

$\implies$ Falls f in z_0 einen Pol der Ordnung $K \geq 1$ hat, gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^K} |g(z)| \to \infty \text{ für } z \to z_0$$ ⊸

4.7 **Casorati-Weierstraß-Sokhotski** *Hat f in z_0 eine wesentliche Singularität, so ist $f(K_{0,\varepsilon}(z_0))$ dicht in $\mathbb{C}$ sobald ε so klein, dass f auf ganz $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ definiert ist, dann für alle solchen $\varepsilon > 0$.*

BEWEIS Sei so ein $\varepsilon > 0$ fest. Annahme:

$$\exists\, w \in \mathbb{C}\, \exists\, \delta > 0 : K_\delta(w) \in \mathbb{C} \setminus f(K_{0,\varepsilon}(z_0))$$

Sei

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in K_{0,\varepsilon}(z_0)$$

$$\implies \begin{cases} g \text{ holomorph} \\ g \text{ beschränkt } |g(z)| = \dfrac{1}{|f(z) - w|} < \dfrac{1}{\delta} \end{cases}$$

Riemannscher Hebbarkeitssatz: g fortsetzbar zu $\tilde{g} : K_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph.

Fall 1:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z_0) \neq 0 \implies & \frac{1}{\tilde{g}} \text{ holomorph in } K_{\tilde{\varepsilon}}(z_0) \\ \implies & f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)} + w \text{ holomorph fortsetzbar in } z = z_0 \\ \implies & H = 0 \ \lightning \end{aligned}$$

Fall 2:

$\tilde{g}(z_0) = 0$, K Ordnung der Nullstelle

a.) $K = \infty$: Dann $\tilde{g} = 0$ in $K_\varepsilon(z_0)$ $\lightning$ $\tilde{g}(z) = \dfrac{1}{f(z) - w} \neq 0$ für $z \in K_{0,\varepsilon}(z_0)$

b.) $K \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z_0) &= \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < \varepsilon \\ &= (z - z_0)^K \sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-K} \\ &= (z - z_0)^K h(z), \quad h \text{ holomorph}, h(z_0) \neq 0 \\ \implies \quad \frac{1}{\tilde{g}(z)} &= \frac{1}{(z - z_0)^K} \frac{1}{h(z)} \text{ für } 0 < |z - z_0| < \tilde{\varepsilon} \\ \implies \quad f(z) &= \frac{1}{\tilde{g}(z)} + w \text{ hat Pol der Ordnung } K \text{ in } z_0 \ \lightning \end{aligned}$$

■

4.8 *Folgerung:* f hat Pol in z_0 $\iff$ $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$. f hat wesentliche Singularität in z_0

$\iff$ $f(K_\varepsilon(z_0))$ ist dicht in $\mathbb{C}$ für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$

$\iff$ $|f(z)|$ unbeschränkt, aber nicht bestimmt divergent [2] für $z \to z_0$

[2] $|f(z)|$ bestimmt divergent für $z - z_0$

f hat hebbare Singularität in $z_0 \iff |f|$ beschränkt für $z \to z_0$ ⊸

4.9 **Definition** *Sei γ geschlossener Weg, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$. Dann heißt*

$$\nu(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz$$

die Umlaufszahl von γ um z_0. ⋊

4.10 **Satz** $\nu(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$

BEWEIS $\nu(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z} \iff e^{2\pi i \nu(\gamma, z_0)}$. Sei

$$\varphi(s) := \exp\left(\int_a^s \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) \, dt\right), \quad (\gamma : [a : b] \to \mathbb{C})$$

Zeige $\varphi(b) = 1$.

$$\varphi'(s) = \varphi(s) \frac{1}{\gamma(s) - z_0} \gamma'(s), \quad \text{für } s \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$$

$$\implies \frac{d}{ds}\left(\frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0}\right) = \frac{\varphi' (\gamma - z_0) - \varphi \, \gamma'}{(\gamma - z_0)^2} = 0, \quad \text{für } s \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$$

$$\implies \frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0} = \text{const auf Teilintervallen}$$

es existieren nur endliche viele Teilintervalle und $\dfrac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0}$ ist stetig

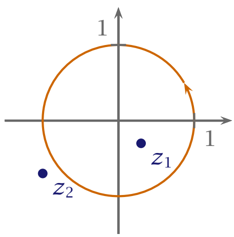
$$\implies \frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0} = \text{const auf } [a, b]$$

$$= \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z_0}$$

$$= \frac{1}{\gamma(a) - z_0}$$

$$\overset{s=b}{\implies} \varphi(b) = \frac{\gamma(b) - z_0}{\gamma(a) - z_0} = 1 \quad \text{da } \gamma(a) = \gamma(b)$$ ∎

4.11 ▶| *Beispiel* **1.)** $\gamma_N : [0, N] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$



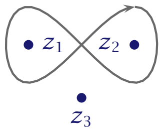
$\iff |f(z)| \to \infty$

$\iff \forall\, M > 0 \, \exists\, \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > M$

$$\nu(\gamma_N, 0) = N \implies \nu(-\gamma_N, 0) = -N$$

$\nu(\gamma_N, z_1) = N$ falls $|z_1| < 1$ ($\gamma_N \overset{\text{in } \mathbb{C}\setminus\{z_1\}}{\sim} \tilde{g}_N : t \mapsto z_1 + e^{2\pi i t}$, dasselbe Integral)

$\nu(\gamma_N, z_2) = 0$ falls $|z_2| > 1$, da γ_N nullhomotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_2\}$



2.)

$$\nu(\gamma, z_j) = \begin{cases} 0 & j = 3 \\ 1 & j = 1 \\ -1 & j = 2 \end{cases}$$

4.12 **Satz** *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad 0 < |z - z_0| < R$$

und γ geschlossener Weg in $K_{0,R}(z_0)$. Dann

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1} \nu(\gamma, z_0)$$

BEWEIS

$$g(z) \coloneqq f(z) - a_{-1}(z - z_0)^{-1}$$
$$\coloneqq \sum_{n=-\infty n\neq -1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dann ist

$$G(z) \coloneqq \sum_{n=-\infty n\neq -1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion in $K_{0,R}(z_0)$

$$\implies \int_\gamma g(z)\, dz = G(\text{Endpunkt}) - G(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

$$\implies \int_\gamma f(z)\, dz = \underbrace{\int_\gamma g(z)\, dz}_{=0} + a_{-1} \underbrace{\int_\gamma (z - z_0)^{-1}\, dz}_{=\nu(\gamma, z_0) 2\pi i} \qquad \blacksquare$$

4.13 **Definition** *Sei f holomorph in O mit isolierter Singularität z_0 und der Laurent-Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1} \overset{4.12}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z\,, \quad \text{für } 0 < r < R$$

Residuum von f in z_0.

4.14 *Beispiel*

1.)

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \underbrace{\frac{(-1)^0}{1!}}_{=a_{-1}} z^{-1} + \frac{(-1)^1}{3!} z^1 + \frac{(-1)^2}{5!} z^3 + \dots$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^2}, 0\right) = \frac{(-1)^0}{1!} = 1$$

2.)

$$\mathrm{e}^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{1/z}, 0\right) = 1$$

3.)

$$\mathrm{e}^{1/z^2} = \frac{1}{0!} \frac{1}{z^0} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \dots$$

es gibt hier kein z^{-1}, also $a_{-1} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{1/z^2}, 0\right) = 0$$

4.15 **Residuensatz** *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in $O \setminus S$, es gelte*

$$\forall\, z \in S : f \text{ hat in } z \text{ eine isolierte Singularität}$$

und γ sei ein C^1-nullhomotoper Weg in O, $\operatorname{Bild}(\gamma) \cap S = \emptyset$. Dann

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z \in S} 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f, z)\, \nu(\gamma, z)$$

und die Summe hat nur endlich viele Summanden $\neq 0$.

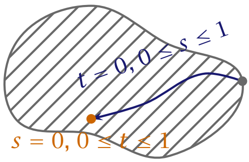
Beweis **Schritt 1:** Zeige, dass nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind.

a.) Für alle hebbaren Singularitäten z gilt $\operatorname{Res}(f, z) = 0$

$$\implies \sum_{S} \ldots = \sum_{S'} \ldots$$

mit $S' \coloneqq \{z \in S : f$ hat in z eine wesentliche Sungilarität, oder einen Pol$\}$.

b.) Sei Φ die Homotopie zwischen γ und einem konstanten Weg.



$\operatorname{Bild}(\Phi)$ ist kompakt (Φ ist stetig, $[0, 1] \times [0, 1]$ ist kompakt).

Behauptung: In $\operatorname{Bild}(\Phi)$ liegen nur endlich viele isolierte Singularitäten. $\multimap$

Annahme: Es gibt mindestens abzählbar viele isolierte Singularitäten. $\multimap$

$$\overset{\operatorname{Bild}(\Phi)\text{ kompakt}}{\implies} \exists \text{ Häufungspunkt } z_0 \in \operatorname{Bild}(\Phi).$$

Sei (z_n) Folge in S', $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$.

$$\overset{4.8}{\implies} \exists (\tilde{z}_n) \in O : |\tilde{z}_n - z_n| \leq \frac{1}{n} \wedge |f(\tilde{z}_n)| \geq n$$

$$\implies \tilde{z}_n \to z_0 \wedge |f(\tilde{z}_n)| \to \infty$$

$$\overset{4.8}{\implies} f \text{ hat in } z_0 \text{ einen Pol oder eine wesentliche Singularität}$$

$$\lightning (z_n \to z_0 \text{ und } z_0 \text{ ist isolierte Singularität}).$$

c.) Für $z_0 \in S' \setminus \operatorname{Bild}(\Phi)$ gilt $\nu(\gamma, z_0) = 0$. Setze

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{z - z_0}$$

holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

$$\operatorname{Bild}(\Phi) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

$$\implies \Phi \text{ ist eine Homotopie zwischen } \gamma \text{ und einer konstanten Kurve in } \mathbb{C} \setminus \{z_0\}.$$

$$\overset{\gamma\text{ nullhomotop}}{\implies} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = 0$$

$$\implies \nu(\gamma, z_0) = 0$$

$$\implies \sum_{z \in S'} \ldots = \sum_{z \in S''} \ldots \overset{\text{b.}}{=} \text{endliche Summe.} \qquad S'' \coloneqq S' \cap \operatorname{Bild}(\Phi)$$

Schritt 2: $S'' = \{z_1, \dots, z_n\}$, H_j Hauptteil in z_j. Sei

$$g(z) := f(z) - H_j(z)$$

holomorph in $O \setminus S$

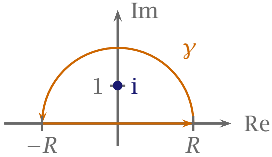
$\implies g$ hat in $\operatorname{Bild}(\Phi)$ nur hebbare Singularitäten.

$\implies$ Es existiert eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{g}$ in einer offenen Umgebung U von $\operatorname{Bild}(\Phi)$.

$$\overset{\gamma \text{ nullhomotop in } U}{\implies} \int_\gamma g \,\mathrm{d}z = \int_\gamma \tilde{g}(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\implies \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \int_\gamma H_j(z)\,\mathrm{d}z}_{\overset{4.12}{=} 2\pi\mathrm{i}\nu(\gamma, z_j)\operatorname{Res}(f, z_j)}$$ ■

4.16 *Beispiel*



$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$$

$S = \{\pm\mathrm{i}\}$, $\nu(\gamma, -\mathrm{i}) = 0$. Berechne $\operatorname{Res}(f, \mathrm{i})$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}} + \text{etwas Holomorphes für } z \neq -\mathrm{i}\end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}}$ hat in $z = \mathrm{i}$ einen Pol der Ordnung 1.

$$a_{-1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}$$

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}1 = \pi\mathrm{e}^{-1}$$ ⏮

4.17 Residuenberechnung **1.)** *Falls f in z_0 einen Pol der Ordnung K hat:*

$$f(z) = \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < r, a_{-K} \neq 0.$$

a.) $K = 1$:

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)} = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}$$

b.) $K \geq 2$:

$$\frac{\mathrm{d}^{K-1}}{\mathrm{d}z^{K-1}} \left((z-z_0)^K f(z)\right) = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+K)\dots(n+2)a_n(z-z_0)^{n+1}$$

$$\to (-1+K)(-1+K-1)\dots(-1+2)a_{-1} \text{ für } z \to z_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(K-1)!} \frac{\mathrm{d}^{K-1}}{\mathrm{d}z^{K-1}} \left((z-z_0)^K f(z)\right)}$$

2.) *Falls $f = g/h$, g, h holomorph, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, dann hat f in z_0 einen Pol erster Ordnung. Sei*

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ h'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist φ holomorph im Definitionsbereich von h.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow & f(z) &= (z-z_0)\varphi(z) \\
&\Longrightarrow & f(z) &= \frac{1}{z-z_0}\frac{g(z)}{\varphi(z)} \\
&\overset{K=1}{\Longrightarrow} & \operatorname{Res}(f,z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \\
& & &= \frac{g(z_0)}{\varphi(z_0)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

4.18 ▶| *Beispiel* **1.)** $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$, $z_0 = i$.

$$\overset{4.17}{\Longrightarrow} \operatorname{Res}(f,i) = \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}$$

2.) Berechne

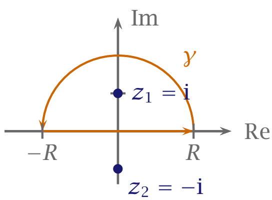
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$$

$$\left| \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x < \infty$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x \text{ absolut konvergent}$$

Betrachte $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2}$, denn $\operatorname{Re} f(x) = \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.



$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) &\overset{K=2}{\underset{4.17}{=}} \frac{1}{1!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{(z-\mathrm{i})^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^2} \right) \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2} \right) \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}(z+\mathrm{i})^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} 2(z+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^4} \Big|_{z=\mathrm{i}} \\
&= \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1} 2\mathrm{i} - 2\mathrm{e}^{-1}}{(2\mathrm{i})^3} = -\mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

Residuensatz

$$\int_{\gamma_R} f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \left(-\mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \right) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}$$

Für $|z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0$:

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\right| = \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{|1+z^2|^2} \overset{|z^2+1|\geq||z^2|-1|}{\leq} \frac{1}{(|z|^2-1)^2} = \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned}\implies \left|\int_{|z|=R \operatorname{Im} z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \max|f|\,L(\gamma)\\ &\leq \frac{1}{(R^2-1)^2}\pi R \to 0\,, \quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

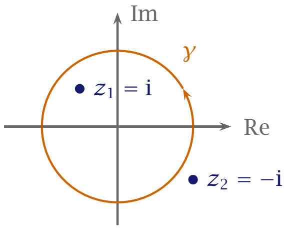
$$\implies \frac{\pi}{e} = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{(1+x^2)^2}$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

4.19 **Definition** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein geschlossener Weg γ in $\mathbb{C}$ berandet G, falls*

$$\nu(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & z \in G \\ 0 & z \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}\end{cases}$$

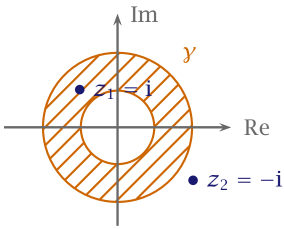
Beispiel **1.)** $G = K_1(0)$, $\gamma_N(t) = e^{2\pi i t N}$, $0 \leq t \leq 1$.



$\nu(\gamma, z_1) = 1$, falls $|z_1| < 1$ und $\nu(\gamma, z_2) = 0$, falls $|z_2| > 1$.

γ_1 berandet G, γ_N berandet G nicht.

2.) $G = K_{1,2}(0)$

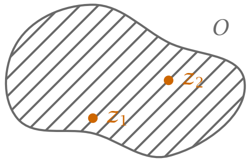


Der Rand besteht aus zwei disjunkten Wegen (Zykel). Deshalb greift hier unsere Definition nicht.

4.20 Definition *Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in $O \setminus S$ (insbesondere $O \setminus S$ offen) und*

$$\forall\, z \in S : f \text{ hat einen Pol in } z.$$ ⋊

Dann heißt f meromorph in O.



z_1, z_2 Polstellen

4.21 Null- und Polstellen zählendes Integral *Sei f meromorph in O, G ein Gebiet, $\overline{G} \subset O$ und γ ein Weg in O der G berandet und keine Null- oder Polstelle trifft. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_G - P_G$$

wobei N_G die Anzahl der Nullstellen von f in G und P_G die Anzahl der Pole von f in G bezeichnet, jeweils mit Ordnung gezählt.

Beweis Sei $S := \{z \in O : f(z) = 0 \vee f \text{ hat Pol in } z\}$. Dann besteht S nur aus isolierten Punkten (Nullstellen nach 3.10, Polstellen nach Definition).

$$g := \frac{f'}{f} \quad \text{ist holomorph in } O \setminus S$$

Nach dem Residuensatz ist

$$\int_\gamma g(z)\, dz = \sum_{z \in S} 2\pi i \operatorname{Res}(g, z) \underbrace{\nu(\gamma, z)}_{= \begin{cases} 1 & z \in G \\ 0 & z \in O \setminus G \end{cases}} = \sum_{z \in S \cap G} 2\pi i \operatorname{Res}(g, z)$$

Betrachte einen einzelnen Summanden, bzw. ein $z_0 \in S \cap G$ und schreibe:

$$f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z) \qquad \tilde{f}(z_0) \neq 0$$

mit holomorphem $\tilde{f}$. Für $k \geq 1$ ist k die Ordnung der Nullstelle und für $k \leq -1$ ist $-k$ die Ordnung des Pols.

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} \tilde{f}(z) + (z - z_0)^k \tilde{f}'(z)$$

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} + \underbrace{\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}}_{\text{holomorph bei } z_0}$$

Damit ist

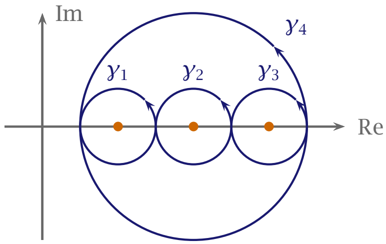
$$\operatorname{Res}(g, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = k$$

Betrachtet man nun wieder die Summe, so ergibt sich sofort die Behauptung. ■

4.22 ▶| *Beispiel*

$$f(z) = \frac{(z-2)(z-3)}{(z-1)^2}$$

ist meromorph in $\mathbb{C}$.



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \begin{cases} -2 & j=1 \\ 1 & j=2,3 \\ 0 & j=4 \end{cases}$$ |◀

4.23 *Folgerung (Null- und Polstellen zählendes Integral 2)* Seien die Voraussetzungen wie in 4.21. Dann gilt

$$N_G - P_G = \nu(f\circ\gamma, 0)$$

Beweis Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, dann gilt nach 4.21:

$$\begin{aligned} N_G - P_G &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \underbrace{\frac{1}{f(\gamma(t))}}_{=\frac{1}{f\circ\gamma}} \underbrace{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}_{=(f\circ\gamma)'}\,dt \end{aligned}$$

(wobei das Integral evtl. eine Summe über Teilintervalle ist)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz \\ &= \nu(f\circ\gamma, 0) \end{aligned}$$ ■

4.24 **Satz von Rouché** *Seien f, g holomorph in O, $G \subseteq O$ berandet vom Weg γ in O. Gilt*

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ für } z \in \mathrm{Bild}(\gamma)$$

dann haben f und $f+g$ gleich viele Nullstellen in G (die Nullstellen mit Ordnung gezählt).

Beweis Mit 4.23

$$\begin{aligned} N_G(f) &= \nu(f \circ \gamma, 0) \\ N_G(f+g) &= \nu((f+g) \circ \gamma, 0) \end{aligned}$$

Zeige, dass $f \circ g \sim (f+g) \circ \gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{O\}$.

γ muss eventuell umparametrisiert werden, damit $\gamma \in C^1$.

$$\Phi(t,s) \coloneqq (f \circ \gamma)(t) + s(g \circ \gamma)(t)$$

dann

$$\left.\begin{aligned} \Phi &\in C^1([0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}) \\ \Phi(t,0) &= (f \circ \gamma)(t) \\ \Phi(t,1) &= ((f+g) \circ \gamma)(t) \\ \Phi &\in \mathrm{Bild}(\Phi) \qquad (*) \end{aligned}\right\} \implies \text{fertig}$$

Zu $(*)$:

$$\begin{aligned} \left|(f \circ \gamma)(t) + s(g \circ \gamma)(t)\right| &= \left|f(\gamma(t)) + s\,g(\gamma(t))\right| \\ &\geq \left|f(\gamma(t))\right| - s\left|g(\gamma(t))\right| \end{aligned}$$

da $0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} &\geq \left|f(\gamma(t))\right| - \left|g(\gamma(t))\right| \\ &\geq 0 \text{ nach Vereinbarung.} \end{aligned}$$

■

Folgerung Sei

$$p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Dann hat p in $\overline{K_R(0)}$ mit

$$R \coloneqq \max\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|, 1\right\}$$

genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Dies sind alle Nullstellen von p.

Beweis Seien

$$f(z) = z^n \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

$$\implies \quad f + g = p$$

f hat die n-fache Nullstelle $z_0 = 0$ und sonst keine in jeder Kreisscheibe $G = K_r(0)$ mit $r > 0$. Sei nun $r > R$. Zeige

$$|g(z)| < |f(z)|\,, \quad \text{für } |z| = r.$$

Dann folgt aus Rouché (4.24) die gesamte Behauptung.

$$P_N(f+g) = P_N(f) = n \text{ in jedem } K_r(0) \text{ mit } r > R$$

$$|g(z)| \overset{|z|=r}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, r^k$$

aus $r > R \geq 1$ folgt $r^k \leq r^{n-1}$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}_{\leq R < r} r^{n-1}$$

$$< r^n = |f(z)|$$

■

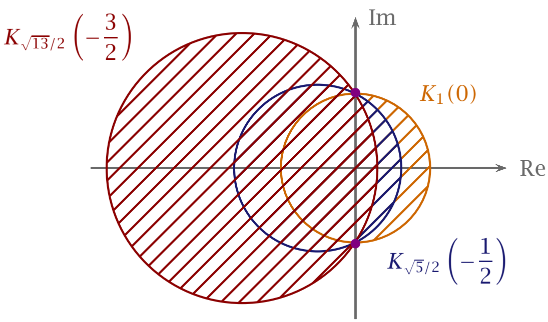
1.5 Analytische Fortsetzung

5.1 ▶| *Beispiel* Betrachte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \quad \text{für } |z| < 1$$

und $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ (geometrische Reihe). Sei

$$g(z) := \frac{1}{1+z^2} \quad \text{für } z \neq \pm \mathrm{i}$$



Entwickle f um $z = -1/2$ in eine Potenzreihe

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$$

Wir wissen: $f = g$ in $K_1(0)$, also ist f_1 gleichzeitig Entwicklung von g.

$\implies$ f_1 hat den Konvergenzradius $r_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Entwickle f_1 um $z_2 = -\dfrac{3}{2}$:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_2)^n \quad \text{in } K_{r_2}(z_2)$$

mit $r_2 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (da f_2 Entwicklung von g ist). Wir haben f, das nur auf $K_1(0)$ definiert ist holomorph auf $K_1(0) \cup K_{\sqrt{5}/2}(-1/2) \cup K_{\sqrt{13}/2}(-3/2)$ fortgesetzt. ⏴

5.2 **Definition** *Ein Tupel $\mathcal{K} = (K_0, \dots, K_n)$ offener Kreisscheiben $K_j = K_{r_j}(z_j)$ heißt Kreiskette, falls*

$$z_j \in K_{j-1} \vee z_{j-1} \in K_j\,, \quad j = 1, \dots, n$$

Sind $f_j : K_j \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f_j\Big|_{K_j \cap K_{j-1}} = f_{j-1}\Big|_{K_j \cap K_{j-1}}\,, \quad j = 1, \dots, n$$

so heißt f_0 analytisch fortsetzbar längs $\mathcal{K}$, f_n heißt analytische Fortsetzung von f_0 längs $\mathcal{K}$. ⋊

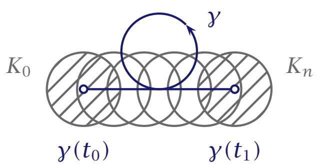
5.3 *Bemerkung:* **1.)** Nach dem Identitätssatz ist f_1 und dann auch $f_2, \dots, f_n$ eindeutig.

2.) Sind $(K_0, \dots, K_n)$, $(\tilde{K}_0, \dots, \tilde{K}_m)$ Kreisketten mit $\tilde{K}_0 = K_0$ und $\tilde{K}_m = K_n$, gilt dann $\tilde{f}_m = f_n$? (Im Allgemeinen nein) ⊸

5.4 **Defintion** *Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$. Eine Kreiskette $\mathcal{K} = (K_0, \dots, K_n)$ verläuft längs γ, falls es eine Unterteilung $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < t_1$ gibt, sodass*

$$\gamma(\tau_j) \text{ Mittelpunkt von } K_j\,, \quad j = 0, \dots, n$$
$$\gamma([\tau_{j-1}, \tau_j]) \subseteq K_{j-1} \cap K_j\,, \quad j = 1, \dots, n$$ ⋊

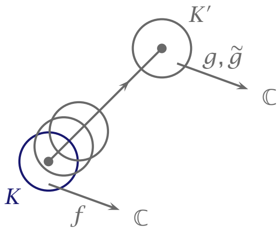
Die zweite Bedingung verhindert, dass γ wie im Bild aus der Kreiskette hinausläuft.



5.5 ▶| *Beispiel* Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq N$. Sei

$$\tau_j \coloneqq \frac{j}{8}\,, \quad j = 0, \dots, 8N$$
$$K_j \coloneqq K_1(\gamma(\tau_j))\,, \quad j = 0, \dots, 8N$$

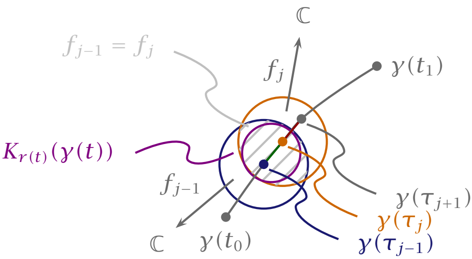
Dann verläuft $\mathcal{K} = (K_0, \dots, K_{8N})$ längs γ. |◀



5.6 **Satz** *Seien $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$, K, K' offene Kreisscheiben um $\gamma(t_0)$ bzw. $\gamma(t_1)$, f holomorph in K und $g, \tilde{g}$ holomoprh in K' und $g, \tilde{g}$ seien aus f durch analytische Fortsetzung längs Kreisketten entstanden, die längs γ verlaufen. Dann gilt*

$$g = \tilde{g}$$

BEWEIS **1.)** Vorüberlegung



Sei $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t_1$ die Unterteilung von $[t_0, t_1]$ mit Kreiskette $K = K_0, K_1, \dots, K_n = K'$ und holomorphe Funktionen $f_j : K_j \to \mathbb{C}$, die f zu g fortsetzen. Für $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ sei

$$P_t(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)(z - \gamma(t))^n\,, \quad z \in K_{r(t)}(\gamma(t))$$

die Potenzreihenentwicklung von f_{j-1} um $\gamma(t)$. Beachte: P_t ist auch die Potenzreihe von f_j um $\gamma(t)$, da $f_j = f_{j-1}$ in $K_j \cap K_{j-1}$. Also in P_t Potenzreihenentwicklung von f_j um $\gamma(t)$ sogar für $t \in [\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$. Da γ stetig: Für festes $t \in [t_0, t_1]$

$$\exists\, \delta > 0 : |\gamma(t') - \gamma(t)| < r(t) \text{ für } |t' - t| < \delta,\ t_0 \leq t' \leq t_1$$

Wähle δ so klein, dass t, t' im selben Intervall $[\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$ liegen.

$\implies$ Für $|t'-t| < \delta$ erhält man $P_{t'}$ durch Entwicklung von P_t um $\gamma(t')$, da um $\gamma(t') : P_t = f_j$

Das nennt man die *lokale Verträglichkeit der Familie* $(P_t)_{t_0 \le t \le t_1}$.

Dasselbe für $\tilde{g}$: Unterteilung $t_0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_m = t_1$, $\tilde{P}_t$ Entwicklung von $\tilde{f}_j$ um $\gamma(t)$.

2.) Eigentlicher Beweis

$$M \coloneqq \{t \in [t_0, t_1] : P_t = \tilde{P}_t\}$$

Zeige: $M = [t_0, t_1] \implies g = P_{t_1} = \tilde{P}_{t_1} = \tilde{g}$.

1.) $M \neq \emptyset$: Wegen $f_0 = f = \tilde{f}_0$ gilt $[t_0, t_0 + \delta] \subseteq M$, δ so gewählt, dass $\gamma(t) \in K = K_0 = \tilde{K}_0$ für $t_0 \le t \le t_0 + \delta$.

2.) M ist relativ offen[3]: Sei $s \in M$, $\delta > 0$ so klein, dass

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \min\{r(s), \tilde{r}(s)\} \text{ für } s - \delta < t < s + \delta$$

(Stetigkeit von γ). Aus der lokalen Verträglichkeit folgt: P_t entsteht aus Entwicklung von P_s um $\gamma(t)$ genauso $\tilde{P}_t$ aus $\tilde{P}_s$.

$$P_s \overset{s \in M}{=} \tilde{P}_s \implies P_t = \tilde{P}_t \text{ für } s - \delta < t < s + \delta$$

3.) M ist abgeschlossen: Sei (s_n) in M, $s_n \to s$, $s_n \neq s$. Dann gilt $\gamma(s_n) \to \gamma(s)$ und entweder $\gamma(s_n) = \gamma(s)$ für ein $n \implies s \in M$, da $P_s = P_{s_n}$ oder $\gamma(s_n) \neq \gamma(s)$ für $n \in \mathbb{N}$: Für $n > N_\delta$:

$$P_s(\gamma(s_n)) = P_{s_n}(\gamma(s_n)) = \tilde{P}_{s_n}(\gamma(s_n)) = \tilde{P}_s(\gamma(s_n)) \overset{\text{Identitätssatz}}{\implies} \tilde{P}_s = P_s.$$

1., 2. und 3. $\implies M = [t_0, t_1]$. ■

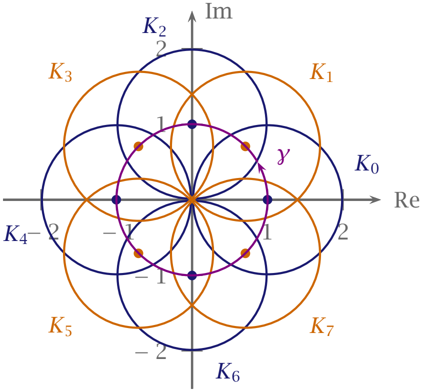
5.7 **Definition** *Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$, K, K' offene Kreisscheiben um $\gamma(t_0)$ bzw. $\gamma(t_1)$. f holomorph in K, g holomorph in K'. Dann heißt g analytische Fortsetzung von f längs γ, falls es eine längs γ verlaufende Kreiskette $\mathcal{K}$ gibt, sodass g analytische Fortsetzung von f längs $\mathcal{K}$ ist.* ⋊

[3] relativ offen: Ich kann M bekommen durch den Schnitt einer offenen Menge mit $[t_0, t_1]$

5.8 ▶| *Beispiel* Seien $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $f(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z}$

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq N$$

$$\tau_j = \frac{j}{8N}, K_j = K_1(\gamma(\tau_j)), j = 0, \ldots, 8N.$$



Setze f längs $K_0, K_1, \ldots, K_{8N}$ fort

$$f_0 = f\Big|_{K_0} \text{ für } j = 1, 2$$

Wie sieht f_3 aus?

$$\arg_\pi(z) := \begin{cases} \arg(z) & \operatorname{Im} z > 0 \\ \pi & z \in]-\infty, 0[\\ \arg(z + 2\pi) & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Setze $g_1(z) := |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg_\pi z}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} g_1 \text{ holomorph in } \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\\ g_1\Big|_{\{z : \operatorname{Im} z > 0\}} = f\Big|_{\{z : \operatorname{Im} z > 0\}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_j = g_1\Big|_{K_j}, \quad j = 3, 4, 5, 6$$

Setze $g_2(z) := |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg_\pi (z + 2\pi)}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} g_2 \text{ holomorph in } \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \\ g_2\Big|_{\{z : \operatorname{Im} z < 0\}} = g_1\Big|_{\{z : \operatorname{Im} z < 0\}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_j = g_2\Big|_{K_j}, \quad j = 7, 8, 9, 10$$

Beachte: $K_8 = K_0$, aber $f_8 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}} f_0 \neq f_0$.

$$f_{16} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\frac{2\pi}{N}} f_0 \neq f_0$$

$$\vdots$$

$$f_{8N} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,N\frac{2\pi}{N}} f_0 = f_0$$

Nach der N-ten Umkreisung der 0 landen wir wieder bei der ursprünglichen Funktion.

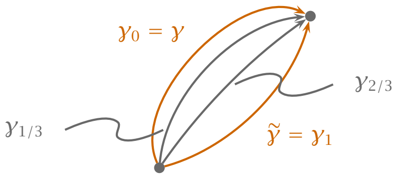
5.9 **Umparametrisierung** *Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{C})$, f_1 analytische Fortsetzung von f längs γ, $\varphi : [s_0, s_1] \to [t_0, t_1]$ stetig, streng monoton wachsend, $\varphi(s_0) = t_0$, $\varphi(s_1) = t_1$. Damit ist f_1 auch analytische Fortsetzung von f längs $\gamma \circ \varphi$. Insbesondere kann immer $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ gewählt werden.*

Beweis Verwende dieselbe Kreiskette, als Unterteilung von $[s_0, s_1] : s_j = \varphi^{-1}(\tau_j)$. ■

5.10 **Monodromiesatz** *Seien $\gamma, \tilde{\gamma} \in C([0,1] \to \mathbb{C})$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Weiter sei $\Phi \in C([0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C})$ eine Homotopie zwischen $\gamma, \tilde{\gamma}$, das heißt*

$$\Phi(\cdot, 0) = \gamma \qquad \Phi(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}$$
$$\Phi(0, s) = \gamma(0) \qquad \Phi(1, s) = \gamma(1)\,, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Ist f_0 holomorph in einer Kreisscheibe $K_r(\gamma(0))$ und lässt sich f_0 längs jedes Weges $\gamma_s := \Phi(\cdot, s)$ analytisch fortsetzen, dann stimmen die analytischen Fortsetzungen von f_0 längs γ und $\tilde{\gamma}$ überein.



Der Beweis verläuft ähnlich wie in 5.6.

5.11 **Definition** *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene stetige Kurve γ in G nullhomotop ist, das heißt es existiert eine Homotopie $\Phi \in C([0,1] \times [0,1] \to G)$ zwischen γ und einer konstanten Kurve.*

Oder äquivalent: Zu je zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 \in C([0,1] \to G)$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ existiert eine Homotopie $\Phi \in C([0,1] \times [0,1] \to G)$.

Beispiel

$\mathbb{C} \setminus [0, \infty[$	Gebiet, einfach zusammenhängend
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	Gebiet, nicht einfach zusammenhängend
	(Der Kreis um die 0 ist nicht nullhomotop)

5.12 *Folgerung* $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, f_0 holomorph in $K_r(z_0) \subseteq G$. Lässt sich f_0 längs jeder stetigen Kurve γ mit Anfangspunkt z_0 analytisch fortsetzen, dann gibt es genau eine holomorphe Funktion

$$f : G \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f\Big|_{K_r(z_0)} = f_0$$

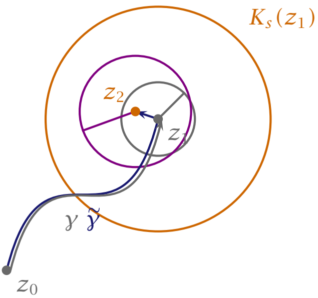
BEWEIS **1.)** Definiere $f : G \to \mathbb{C}$. Sei $z_1 \in G$. Da G ein Gebiet ist folgt: Es existiert eine stetige Kurve γ von z_0 nach z_1. Setze f_0 längs γ fort zu $f_1 : K_s(z_1) \to \mathbb{C}$ (f_1 ist holomorph). Setze $f(z_1) \coloneqq f_1(z_1)$. f ist sinnvoll definiert: Ist $\tilde{\gamma}$ eine andere stetige Kurve von z_0 nach z_1. Da G einfach zusammenhängend ist folgt $\gamma \sim \tilde{\gamma}$.

Monodromiesatz 5.10: Fortsetzung längs $\tilde{\gamma}$ liefert dieselbe Funktion f_1.

2.) Zeige: f ist holomorph. Sei $z_1 \in G$ fest, f_1 wie oben. Zeige

$$f\Big|_{K_{s/3}}(z_1).$$

Dann ist f holomorph in $K_{s/3}(z_1)$. Da $z_1 \in G$ holomorph ist, ist f holomorph in G.



Sei $z_2 \in K_{s/3}(z_1)$. Bilde $\tilde{\gamma}$ aus γ durch Anhängen der Strecke $z_1 z_2$. Ergänze dei Kreiskette $\mathcal{K}$ längs γ, die zur Fortsetzung längs γ verwendet wurde, durch $K_{s/2}(z_2)$ zur Kreiskette $\widetilde{\mathcal{K}}$ längs $\tilde{\gamma}$. $f(z_2)$ wird definiert durch analytische Fortsetzung von f_0 längs $\tilde{\gamma}$. Dies liefert $f_2 : K_{s/2}(z_2) \to \mathbb{C}$. Wegen

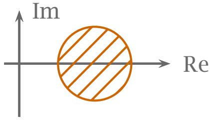
$$f_2 = f_1 \text{ in } K_{s/2}(z_2) \cap K_s(z_1)$$

folgt $f(z_2) \coloneqq f_2(z_2) = f_1(z_2)$.

3.) Zeige: f ist eindeutig. Ist $\mathcal{K} = (K_1, \ldots, K_n)$ Kreiskette längs γ, so ist $f\Big|_{K_j}$ eine analytische Fortsetzung längs γ. Aus Satz 5.6 folgt: Jede andere Fortsetzung längs γ liefert dieselbe analytische Fortsetzung. ∎

5.13 **Beispiel**

$$f_0(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z} \quad \text{in } K_1(2)$$



Falls $G = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$

$$f(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z}$$

falls $G = \mathbb{C} \setminus]-i\infty, i0]$

$$f(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg_{\pi/2} z}$$

5.14 *Ausblick* Erweiterung des Wegintegrals auf stetige Kurven. Ist f analytische fortsetzbar längs γ mit Unterteilung

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t_1,$$

so definiere

$$\int_\gamma f(z)\, dz \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma|_{[\tau_{j-1}, \tau_j]}} f(z)\, dz$$

$$\int_{\gamma|_{[\tau_{j-1}, \tau_j]}} f(z)\, dz \coloneqq F_j(\gamma(\tau_j)) - F_j(\gamma(\tau_{j-1})).$$

F ist die lokale Stammfunktion der Fortsetzung von f in K_j. ⊸

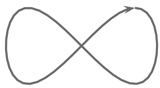
2 VEKTORANALYSIS

2.1 Kurvenintegrale

1.1 **Definition** *Sei $f \in C([a,b] \to \mathbb{R}^n)$.*

1.) *$K \coloneqq \mathrm{Bild}(f)$ heißt Kurve im $\mathbb{R}^n$, $(f,[a,b])$ heißt Parameterdarstellung von K. Ist $f(a) = f(b)$, so heißt K geschlossen.*

2.) *Ist $f\big|_{[a,b[}$ injektiv, so heißt K Jordan-Kurve.*

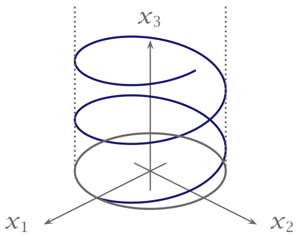


Diese Kurve ist geschlossen und nicht Jordan.

1.2 *Bemerkung:* Die Parameterdarstellung induziert den Durchlaufsinn.

1.3 *Beispiel* Für $r > 0$, $c > 0$ beschreibt

$$f(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 4\pi$$



eine Schraubenlinie mit Radius r und Ganghöhe $\frac{c}{2\pi}$.

1.4 **Definition** *Seien $(f,[a,b])$ und $(g,[c,d])$ zwei Parameterdarstellungen von K. Existiert $\varphi \in C^1([a,b] \to \mathbb{R})$ mit*

- $\varphi'(t) > 0$ *in* $[a,b]$
- $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$
- $f(t) = (g \circ \varphi)(t)$, $t \in [a,b]$

so heißen die Parameterdarstellungen äquivalent.

1.5 *Beispiel* **1.)** Die Parameterdarstellung

$$g(t) = \begin{pmatrix} r\cos\left(8\pi\frac{t}{1+t}\right) \\ r\sin\left(8\pi\frac{t}{1+t}\right) \\ c\left(8\pi\frac{t}{1+t}\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

ist äquivalent zu f aus 1.3 (mit $\varphi(t) = 8\pi\frac{t}{1+t}$).

2.) Die Parameterdarstellung

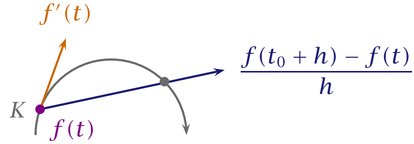
$$h(t) = \begin{pmatrix} r\cos t^2 \\ r\sin t^2 \\ ct^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \sqrt{4\pi}$$

ist nicht äquivalent zu f aus 1.3 ($\varphi(t) = t^2$), weil $\varphi'(0) = 0$.

1.6 **Definition** *Sei* $(f,[a,b])$ *Parameterdarstellung von* K. *Existiert* $f'(t_0)$ *und ist* $f'(t_0) \neq 0$, *so heißt*

$$T_f(t_0) := \frac{1}{\|f'(t_0)\|} f'(t_0)$$

Tangenteneinheitsvektor an K *im Punkt* $f(t_0)$.



1.7 **Satz** *Sind* $(f,[a,b])$ *und* $(g,[c,d])$ *äquivalente Parameterdarstellungen von* K, *so gilt*

$$\begin{aligned} T_f(t) &= \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{(g\circ\varphi)'(t)}{\|(g\circ\varphi)'(t)\|} \\ &= \frac{g'(\varphi(t))\varphi'(t)}{\|g'(\varphi(t))\varphi'(t)\|} \overset{\varphi'(t)>0}{=} \frac{g'(\varphi(t))}{\|g'(\varphi(t))\|} \\ &= T_g(\varphi(t)) \end{aligned}$$

1.8 **Definition** *Sei* K *eine Kurve im* $\mathbb{R}^n$.

1.) *Existiert eine Parameterdarstellung $(f,[a,b])$ mit $f \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ und $f'(t) \neq 0$ auf $[a,b]$, so heißt K glatt. Insbesondere ist dann T_f stetig.*

2.) *K heißt stückweise glatt, falls es eine Parameterdarstellung $(f,[a,b])$ gibt und eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, sodass die Teilkurven von K glatt sind:*

$$f\Big|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1([t_{j-1},t_j] \to \mathbb{R}^n)$$

und $f'(t) \neq 0$ für $t_{j-1} \leq t \leq t_j$. ⋊

1.9 *Bemerkung:* Glatte Kurven haben keine Ecken, stückweise glatte Kurven können Ecken besitzen. ⊸

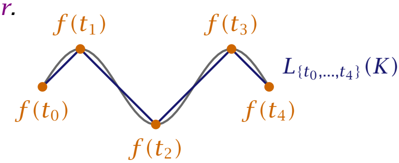
1.10 **Definition** *Sei K eine Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(f,[a,b])$.*

1.) *Falls*

$$\exists\, M > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b:$$

$$L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq M$$

so heißt K rektifizierbar.



2.) *Ist K rektifizierbar, so heißt*

$$L(K) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K)$$

die Bogenlänge von K. ⋊

1.11 **Satz** *Sei K glatte Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(f,[a,b])$, $f \in C^1([a,b] \to \mathbb{R}^n)$. Dann ist K rektifizierbar und es gilt*

$$L(K) = \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

BEWEIS **1.)** Für $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gilt

$$\|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$\implies L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) \leq \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \eqqcolon M$$

$$L(K) \leq M$$

$\implies$ K ist rektifizierbar.

2.) Sei $\varepsilon > 0$ fest. f' gleichmäßig stetig

$$\implies \quad \exists\, \delta > 0\; \forall\, |s-t| < \delta : \|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon$$

Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $\max |t_j - t_{j-1}| < \delta$

$$\begin{aligned} \implies \quad \|f'(t)\| &= \|f'(t) - f'(t_j) + f'(t_j)\| \\ &\le \varepsilon + \|f'(t_j)\| \quad \text{für } t_{j-1} \le t \le t_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \quad \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t &\le \varepsilon(t_j - t_{j-1}) + \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) \\ &= \varepsilon(t_j - t_{j-1}) + \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(f'(t_j) - f'(t) + f'(t)\big)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\le 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) + \|f'(t_j) - f'(t_{j-1})\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\sum_j}{\implies} \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t &\le 2\varepsilon(b-a) + L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) \\ &\le 2\varepsilon(b-a) + L(K) \end{aligned}$$

$$\overset{\varepsilon\downarrow 0}{\implies} \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \le L(K)$$

■

1.12 **Hilfssatz** *Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a,b])$. Ist $a < c < b$, $K' = \gamma([a,c])$, $K'' = \gamma([c,b])$, dann sind K', K'' rektifizierbare Jordan-Kurven und es gilt $L(K') + L(K'') = L(K)$.*

BEWEIS **1.)** Seien $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = c$ und $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$.

$$\begin{aligned} \implies \underbrace{L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K')}_{\ge 0} + \underbrace{L_{\{s_0,\ldots,s_n\}}(K'')}_{\ge 0} &= L_{\{t_0,\ldots,t_n = s_0,\ldots,s_n\}}(K) \\ &\ge L(K) \end{aligned}$$

$$\implies K', K'' \text{ sind rektifizierbar, } L(K') + L(K'') \le L(K).$$

2.) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $\{t_0, \ldots, t_n\}$ mit

$$L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) \ge L(K) - \varepsilon$$

Füge eventuell c als Unterteilungspunkt dazu.

$$\{t'_0 = a < t'_1 < \ldots < t'_k = c < t'_{k+1} < \ldots < t'_m = b\}$$

Wegen der Dreiecksungleichung

$$L_{\{t'_0,\ldots,t'_m\}}(K) \ge L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) \ge L(K) - \varepsilon$$

wegen

$$\|\gamma(t'_{k+1}) - \gamma(t'_{k-1})\| = \|\gamma(t'_{k+1}) - \gamma(t'_k)\| + \|\gamma(t'_k) - \gamma(t'_{k-1})\|.$$

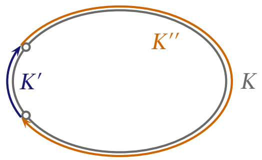
Außerdem

$$L_{\{t'_0,\dots,t'_m\}}(K) = L_{\{t'_0,\dots,t'_k\}}(K') + L_{\{t'_k,\dots,t'_m\}}(K'')$$

damit folgt

$$L(K') + L(K'') \geq L(K) - \varepsilon$$ ■

da $\varepsilon > 0$ beliebig $L(K') + L(K'') \geq L(K)$.



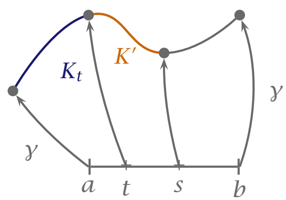
1.13 *Bemerkung:* Ist K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit äquivalenten Parameterdarstellungen f und g, so gilt

$$\begin{aligned} L^{(f)}(K) &= \sup_{\{\dots\}} \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \\ &= \sup_{\{\dots\}} \sum_{j=1}^{n} \|g(s_j) - g(s_{j-1})\| \\ &= L^{(g)}(K) \end{aligned}$$

denn zu $\{t_0, \dots, t_n\}$ »passt« genau die Unterteilung $\{\varphi^{-1}(t_0), \dots, \varphi^{-1}(t_n)\}$ und umgekehrt. ⊸

1.14 **Hilfssatz** *Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(\gamma, [a,b])$. Definiere $L : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch*

$$L(t) \coloneqq L(K_t), \quad K_t \coloneqq \gamma([a,t]), \ a \leq t \leq b$$



Dann gelten:

1.) *L ist streng monoton wachsend*

2.) *L ist stetig*

3.) $\operatorname{Bild}(L) = [0, L(K)]$

4.) *Falls K glatt ist und $\gamma \in C^1$, dann ist L differenzierbar und*

$$L'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

BEWEIS **1.)** Sei $a \leq t < s \leq b$.

$$L(s) \overset{1.12}{=} L(t) + L(K'), \quad K' = \gamma([t,s])$$
$$L(K') \geq \|\gamma(s) - \gamma(t)\| > 0$$

da K Jordan-Kurve und s, t nicht zugleich Anfangs- und Endpunkt.

2.) **1.)** Zeige: L ist stetig in $t = b$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ mit $L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) > L(K) - \varepsilon$ $(*)$. γ ist gleichmäßig stetig, wenn gilt

$$\exists\, \delta > 0 : |s - t| < \delta \implies |\gamma(s) - \gamma(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Setze $K_j := \gamma([t_j, t_{j-1}])$

$$\overset{1.12}{\implies} \sum_{j=1}^{n} L(K_j) = L(K)$$

$$\implies 0 \leq L(K_n) - \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{L(K_j) - \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|}_{\geq 0} \Big)$$
$$= L(K) - L_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

O.B.d.A. kann angenommen werden:

$$|t_j - t_{j-1}| < \delta$$

Andernfalls füge geeignet weitere Unterteilungspunkt hinzu. Da dabei $L_{\{\ldots\}}(K)$ höchstens größer wird bleibt $(*)$ erhalten.

$$\implies L(K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| \overset{(**)}{<} \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &\overset{1.}{\leq} L(\ell = t_n) - L(t), \quad \text{für } t_{n-1} \leq t \leq t_n = \ell \\ &\overset{1.}{\leq} L(\ell) - L(t_{n-1}) \\ &= L(K_n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\implies$ L ist (linksseitig) stetig bei $t = b$.

2.) Für $t \in]a, b]$ betrachte $\gamma([a,t])$. Wende a) an, dann folgt, dass L linksseitig stetig bei t ist.

3.) Rechtsseitige Stetigkeit bei $t = a$: Wie 1., aber K_1 anstelle von K_n:

$$0 \leq L(K_1) - \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0 = a)\| \leq \ldots \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies L(K_1) < \varepsilon$$

4.) Für $t \in [a, b[$ betrachte $\gamma([t, b])$, wende 3. an $\implies$ L rechtsseitig stetig in t.

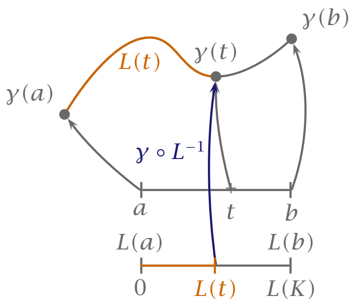
3.) Klar.

4.) $L(t) \overset{1.11}{=} \int\limits_a^t \| \underbrace{\gamma'(\tau)}_{\text{stetig}} \| \, \mathrm{d}\tau \implies L'(t) = \|\gamma'(t)\|$ ∎

1.15 **Definition** *Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$. Dann heißt*

$$(g, [0, L(K)]) \, , \quad \textit{mit } g(s) \coloneqq \gamma(L^{-1}(s))$$

Bogenlängendarstellung von K (äquivalente Parameterdarstellungen führen auf dieselbe Bogenlängedarstellung).



Beide orangenen Linien sind gleich lang. ⋊

1.16 *Folgerung:* Falls K glatt und γ differenzierbar folgt aus 1.15 4.), dass L differenzierbar ist. Wegen

$$(L^{-1})'(s) = \frac{1}{L'(L^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(L^{-1}(s))\|} \neq 0, \text{ da } K \text{ glatt ist}$$

ergibt sich für die Bogenlängendarstellung von K

$$\|g'(s)\| = \|\gamma'(L^{-1}(s)) \, L^{-1\prime}(s)\| = 1$$ ⊸

1.17 **Beispiel** Sei eine Kurve durch die Parametrisierung γ gegeben:

$$\gamma(t) = r\begin{pmatrix}\cos(2\pi t)\\ \sin(2\pi t)\end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\|\gamma'(t)\| = \left\| r\begin{pmatrix}-2\pi\sin(2\pi t)\\ 2\pi\cos(2\pi t)\end{pmatrix}\right\| = 2\pi r$$

$$\implies L(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = 2\pi r t = s$$

$$\implies L^{-1}(s) = t = \frac{s}{2\pi r}$$

Damit ergibt sich die Bogenlängendarstellung:

$$g(s) = \gamma(L^{-1}(s)) = r\begin{pmatrix}\cos\frac{s}{r}\\ \sin\frac{s}{r}\end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 2\pi r$$

1.18 **Definition** *Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit Bogenlängendarstellung $(g, [0, L(K)])$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq D$. Dann heißt*

$$\int_K f\,\mathrm{d}s := \int_0^{L(K)} f(g(s))\,\mathrm{d}s$$

Kurvenintegral von f über K.

1.19 **Satz** *Sei K eine glatte, rektifizierbare Jordan-Kurve, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq D$ und $(\gamma, [a, b])$ die Parameterdarstellung von K. Dann*

$$\int_K f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

BEWEIS

$$\int_K f\,\mathrm{d}s = \int_0^{L(K)} f(g(s))\,\mathrm{d}s$$

Nebenrechnung

$$g = \gamma \circ L^{-1}$$

Substitution: $s = L(t)$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = L'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

Einsetzen

$$\overset{s=L(t)}{=} \int_{0=L(a)}^{L(K)=L(b)} f(g(L(t)))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \qquad \blacksquare$$

1.20 *Beispiel* **1.)** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^1 : t \mapsto t$

$$\implies K = [a,b]$$

$$\implies \int_K f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,1\,\mathrm{d}t$$

Also: Kurvenintegral beinhaltet »altes« Integral über Intervalle.

2.) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\int_K f\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (t^2 + a^2t^2)\sqrt{1+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(1+a^2)^{3/2}$$

1.21 *Eigenschaften von Kurvenintegralen:* **1.)** Linearität:

$$\int_K (\lambda f + \mu g)\,\mathrm{d}s = \lambda \int_K f\,\mathrm{d}s + \mu \int_K g\,\mathrm{d}s$$

2.) *Standardabschätzung*:

$$\left| \int_K f\,\mathrm{d}s \right| \le \max_{x\in K} |f(x)|\, L(K)$$

3.) Sei $K = K_1 \cup K_2$, dann

$$\int_K f\,\mathrm{d}s = \int_{K_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{K_2} f\,\mathrm{d}s$$

1.22 **Definition** **1.)** *Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, D offen, f differenzierbar. Dann heißt*

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j$$

Divergenz von f (Quellenstärke). In diesem Zusammenhang heißt f auch Vektorfeld.

2.) *Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f differenzierbar. Dann heißt*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$$

Gradient von f. Man nennt f auch Skalarfeld.

3.) *Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und D offen. Gibt es eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$, sodass*

$$\nabla F = f \text{ in } D$$

so heißt f Gradientenfeld, F heißt Potential von f.

4.) *Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f differenzierbar. Dann heißt*

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix}$$

Rotation von f (Wirbelstärke). ⋊

1.23 *Rechenregeln:* Seien im Folgenden $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_3, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder, $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Skalarfelder und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare.

1.) Linearität:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla \cdot f + \mu \nabla \cdot g \\ \nabla (\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla f + \mu \nabla g \\ \nabla \times (\lambda f_3 + \mu g_3) &= \lambda \nabla \times f_3 + \mu \nabla \times g_3 \end{aligned}$$

2.) Produktregeln:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a f) &= (\nabla a) \cdot f + a \nabla \cdot f \\ \nabla (a b) &= a \nabla b + b \nabla a \\ \nabla \times (a f_3) &= a (\nabla \times f_3) + (\nabla a) \times f_3 \end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f_3) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times f_3) &= 0 \end{aligned}$$

⊸

1.24 **Definition** *Sei K eine glatte Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(\gamma, [a,b])$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $K \subseteq D$. Dann heißt*

$$\int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

das Wegintegral von f über K. $\rtimes$

1.25 *Bemerkung:* **1.)** Die Definition ergibt durchaus ihren Sinn, denn aus der Definition des bekannten Kurvenintegrals erhält man:

$$\int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s = \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

2.) Das Wegintegral wird in der Physik auch als Arbeitsintegral bezeichnet.

$$W = \int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial t} \,\mathrm{d}t$$

3.) Andere Schreibweise

$$\int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^n \int_K f_j \,\mathrm{d}x_j$$

$$\int_K f_j \,\mathrm{d}x_j = \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) \,\mathrm{d}t$$ $\multimap$

1.26 **Satz** *Ist $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld mit Potential $F : D \to \mathbb{R}$, so gilt für jede Kurve $K \subseteq D$*

$$\int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s = F(\mathit{Endpunkt}) - F(\mathit{Anfangspunkt})$$

Insbesondere: Wegintegral ist wegunabhängig.

Beweis Betrachte

$$\int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s = \int_K f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

wobei $f(\gamma(t)) = \nabla F(\gamma(t))$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (F \circ \gamma)(t) \,\mathrm{d}t$$

mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t)$$

mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s &= (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

■

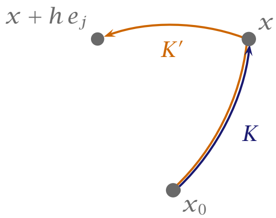
1.27 **Satz** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(D \to \mathbb{R}^n)$. Ist das Wegintegral über stückweise glatte Kurven in D wegunabhängig, so besitzt f ein Potential in D.*

Beweis Sei $x_0 \in D$ fest. Zu $x \in D$ wähle eine Kurve K von x_0 nach x, setze

$$F(x) \coloneqq \int_K f \cdot T \,\mathrm{d}s$$

Da das Integral wegunabhängig ist, ist F sinnvoll definiert. Sei $j = \{1, \ldots, n\}$, $x \in D$.

Vorüberlegung



$$\begin{aligned}F(x + h e_j) - F(x) &= \int_x^{x+h e_j} f \cdot T \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^h f(x + t e_j) \cdot e_j \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^h f_j(x + t e_j) \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{h}(F(x + h e_j)) - F(x) - f_j \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{(f_j(x + t e_j) - f_j(x))}_{|\cdot| < \varepsilon \text{ für } |h| < \delta} \,\mathrm{d}t \right| \\ &< \frac{1}{h} \varepsilon h = \varepsilon \text{ für } |h| < \delta\end{aligned}$$

■

2.2 Flächenintegrale im $\mathbb{R}^3$

2.1 **Definition** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f \in C^1(\overline{D} \to \mathbb{R}^3)$, $f|_D$ injektiv und*

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}\partial_{x_1} f(x) & \partial_{x_2} f(x)\end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix}\partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_2} f_2 \\ \partial_{x_1} f_3 & \partial_{x_2} f_3\end{pmatrix} = 2$$

für $x \in \overline{D}$. Dann heißt

$$F \coloneqq \operatorname{Bild}(f)$$

Fläche im $\mathbb{R}^3$. $(f, \overline{D})$ heißt Parameterdarstellung von F. ⋊

2.2 **Satz** *Ist $(\gamma, [a, b])$ Parameterdarstellung einer glatten Kurve in $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, so ist $(f \circ \gamma, [a, b])$ eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^3$.*

Beweis **1.)** $\gamma \in C^1, f \in C^1 \implies f \circ \gamma \in C^1$.

2.)

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t) &= \begin{pmatrix}(f_1 \circ \gamma)'(t) \\ (f_2 \circ \gamma)'(t) \\ (f_3 \circ \gamma)'(t)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}(\partial_{x_1} f_1)\gamma_1' + (\partial_{x_2} f_1)\gamma_2' \\ (\partial_{x_1} f_2)\gamma_1' + (\partial_{x_2} f_2)\gamma_2' \\ (\partial_{x_1} f_3)\gamma_1' + (\partial_{x_2} f_3)\gamma_2'\end{pmatrix} \\ &= \gamma_1'(t)\partial_{x_1} f(\gamma(t)) + \gamma_2'(t)\partial_{x_2} f(\gamma(t)) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

da $\{\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f\}$ linear unabhängig und $\begin{pmatrix}\gamma_1' \\ \gamma_2'\end{pmatrix} \neq 0$. ■

2.3 *Folgerung:* Der Tangenteneinheitsvektor von $f \circ \gamma$ an der Stelle $t_0 \in [a, b]$:

$$T_{f\circ\gamma}(t_0) = \frac{(f \circ \gamma)'(t_0)}{\|(f \circ \gamma)'(t_0)\|} = c_1 \partial_{x_1} f(\gamma(t_0)) + c_2 \partial_{x_2} f(\gamma(t_0))$$

liegt immer in der von $\{\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f\}$ aufgespannten Ebene durch $f(\gamma(t_0))$. ⊸

2.4 **Definition** *Sei $(f, \overline{D})$ Parameterdarstellung einer Fläche F.*

1.) *Für $x \in D$ heißt die Ebene*

$$\{f(x) + t\partial_{x_1} f(x) + s\partial_{x_2} f(x) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

die Tangentialebene an F im Punkt $f(x)$.

2.) *Der Normaleneinheitsvektor im Punkt $f(x)$ an die Fläche F ist gegeben durch*

$$n(x) := \frac{\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)}{\|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\|}$$

2.5 *Bemerkung:* $\|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $\partial_{x_1} f(x)$ und $\partial_{x_2} f(x)$ aufgespannt wird.

2.6 **Definition** *Sei $(f, \overline{D})$ Parameterdarstellung einer Fläche F und $g \in C(\overline{D} \to \mathbb{R})$.*

1.)

$$|F| := \int_{\overline{D}} \|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\| \, \mathrm{d}x$$

heißt Flächeninhalt der Fläche F.

2.)

$$\int_{\overline{D}} g(f(x)) \cdot \|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\| \, \mathrm{d}x =: \int_F g \, \mathrm{d}\sigma$$

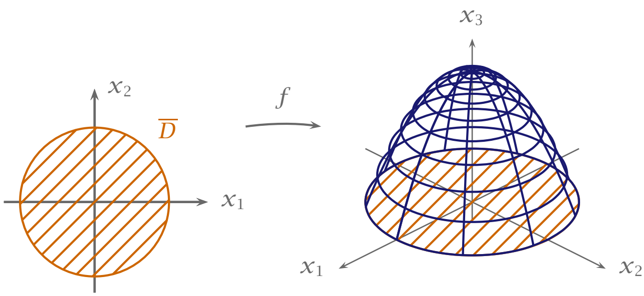
heißt Integral von g über F. Offensichtlich

$$\int_F 1 \, \mathrm{d}\sigma = |F|$$

2.7 *Beispiel*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \sqrt{2}\}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$



$$
\begin{aligned}
\partial_{x_1} f &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix} \\
\partial_{x_2} f &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \\
\|\partial_{x_1} f \times \partial_{x_1} f\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \neq 0 \\
|F| &= \int_{|x|<\sqrt{2}} \sqrt{1+4|x|^2}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Transformation auf Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{12}(27-1)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{13}{6}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{13}{3}\pi
\end{aligned}
$$

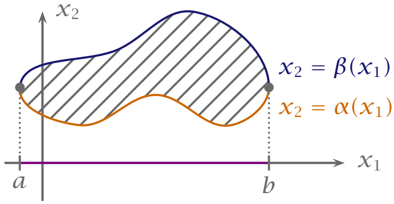
2.3 Volumenintegrale und Integralsätze

3.1 **Definition** *Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt projizierbar in x_n-Richtung, falls es ein beschränktes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und $\alpha, \beta \in C(\overline{G} \to \mathbb{R})$ mit $\alpha(x') \leq \beta(x')$ für $x' \in G$ gibt, sodass*

$$
S = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in G \wedge \alpha(x') \leq x_n \leq \beta(x')\}
$$

Ist S projizierbar in jede x_j-Richtung ($j = 1, \dots, n$), so heißt S Standardbereich. $\rtimes$

z.B. $n = 2$. Die Funktion ist projizierbar in x_2-Richtung, aber nicht in x_1-Richtung.



3.2 *Bemerkung:* Ist S projizierbar in x_n-Richtung und $f : S \to \mathbb{R}$ messbar mit

$$\int_S |f| \,\mathrm{d}x < \infty$$

so folgt aus dem Satz von Fubini:

1.) $f(x', \cdot) : [\alpha(x'), \beta(x')] \to \mathbb{R}$ ist messbar für fast alle $x' \in G$

2.) fast überall ist

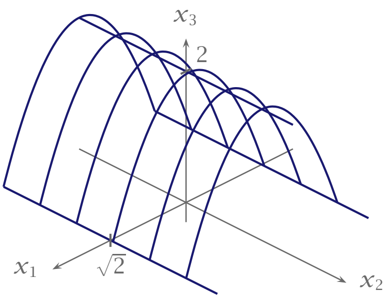
$$F(x') := \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', x_n) \,\mathrm{d}x_n$$

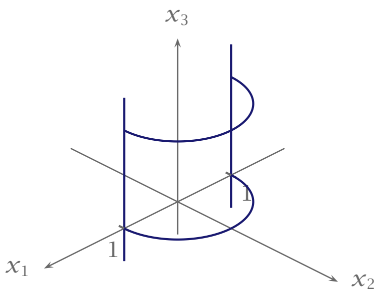
definiert

3.)

$$\int_S f \,\mathrm{d}x = \int_{\overline{G}} \int_{x_n=\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', x_n) \,\mathrm{d}x_n \,\mathrm{d}x'$$ ⊸

3.3 ▶| *Beispiel* $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_3 \le 2 - x_2^2 \wedge x_2 \ge 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$. Vorstellung: Schnitt von

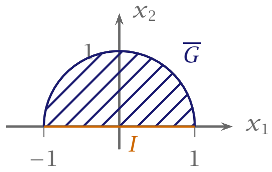




S ist projizierbar in x_3-Richtung:

$$G = \{(x_1, x_2) : x_2 \ge 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 < 1\}_{(x_1,x_2)\in G}$$

$$\alpha(x_1, x_2) = 0 \qquad \beta(x_1, x_2) = 2 - x_2^2 > 2 - 1 > \alpha(x_1, x_2)$$



$\overline{G}$ ist projizierbar in x_2-Richtung

$$\begin{aligned} I &=]-1,1[\\ \tilde{\alpha}(x_1) &= 0 \\ \tilde{\beta}(x_1) &= \sqrt{1-x_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad \int_S x_2 x_3 \, \mathrm{d}x &= \int_{\overline{G}} \left(\int_0^{2-x_2^2} x_2 x_3 \, \mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{d}(x_1,x_2) \\ &= \int_{\overline{G}} x_2 \frac{x_3^2}{2} \Big|_{x_3=0}^{2-x_2^2} \mathrm{d}(x_1,x_2) \\ &= \int_{\overline{G}} \frac{1}{2} x_2 (2-x_2^2)^2 \mathrm{d}(x_1,x_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_I \left(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2 (2-x_2^2)^2 \, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_I -\frac{1}{6}(2-x_2^2)^3 \Big|_0^{\sqrt{1-x_1^2}} \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_I \frac{8}{6} - \frac{1}{6}(1+x_1^2)^3 \, \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{12} \int_{-1}^{1} (7 - x_1^6 - 3x_1^4 - 3x_1^2) \, \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{12}(14 - \frac{2}{7} - \frac{6}{5} - 2) \end{aligned}$$

3.4 **Integralsatz im $\mathbb{R}^2$** *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Standardbereich, dann sei $f, g \in C^1(D \to \mathbb{R})$, D offen und $\overline{S} \subseteq D$. Bei der projizierten Darstellung in x_1- bzw. x_2-Richtung seien α, β stückweise glatt. ∂S werde im Gegenuhrzeigersinn[1] durchlaufen. Dann*

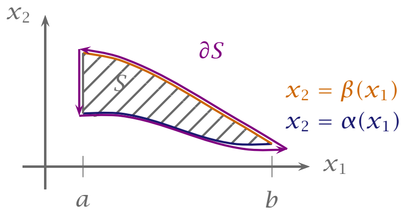
$$\left(\int_{\partial S} f \, \mathrm{d}x_2 = \right) \quad \int_{\partial S} f \cdot T_2 \, \mathrm{d}s = -\int \partial_{x_1} f \, \mathrm{d}(x_1,x_2) \qquad (*)$$

$$\left(\int_{\partial S} g \, \mathrm{d}x_1 = \right) \quad \int_{\partial S} g \cdot T_1 \, \mathrm{d}s = -\int \partial_{x_2} g \, \mathrm{d}(x_1,x_2)$$

[1] Neologismus von PD Dr. Lesky, eigentlich: »gegen den Uhrzeigersinn«

wobei $T = \binom{T_1}{T_2}$ *der Tangentenvektor ist.*

BEWEIS Vorüberlegung



Parameterdarstellung von ∂S:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a + t(b-a) \\ \alpha(a + t(b-a)) \end{pmatrix} & 0 \leq t < 1 \\ \begin{pmatrix} b \\ \alpha(b) + (t-1)(\beta(b) - \alpha(b)) \end{pmatrix} & 1 \leq t < 2 \\ \begin{pmatrix} b + (t-2)(a-b) \\ \beta(b + (t-2)(a-b)) \end{pmatrix} & 2 \leq t < 3 \\ \begin{pmatrix} a \\ \beta(a) + (t-3)(\alpha(a) - \beta(a)) \end{pmatrix} & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

$$\implies \quad \gamma'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} b-a \\ \dots \end{pmatrix} & 0 < t < 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} & 1 < t < 2 \\ \begin{pmatrix} a-b \\ \dots \end{pmatrix} & 2 < t < 3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} & 3 < t < 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\partial S} g \cdot T_1 \, ds = \int_0^4 g(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 g \begin{pmatrix} a + t(b-a) \\ \alpha(a + t(b-a)) \end{pmatrix} (b-a) \, dt + 0$$

$$+ \int_2^3 g \begin{pmatrix} b + (t-2)(a-b) \\ \beta(b + (t-2)(a-b)) \end{pmatrix} (a-b) \, dt + 0$$

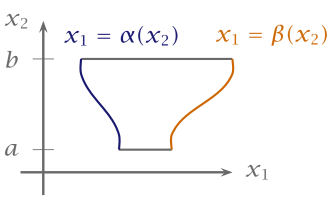
$$= \int_a^b g \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha(x_1) \end{pmatrix} dx_1 - \int_a^b g \begin{pmatrix} x_1 \\ \beta(x_1) \end{pmatrix} dx_1 \qquad \blacksquare$$

Andererseits

$$\int_S \partial_{x_2} g \, d(x_1, x_2) = \int_{x_1=a}^{b} \int_{x_2=\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} \partial_{x_2} g(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

$$= \int_{x_1=a}^{b} \left(g(x_1, \beta(x_1)) - g(x_1, \alpha(x_1)) \right) dx_1$$

Für Gleichung $(*)$ genauso, aber ∂S in andere Richtung parametrisieren



3.5 *Folgerungen:* Voraussetzungen wie in 8.4, aber $f \in C^1(D \to \mathbb{R}^2)$

1.) Satz von Green:

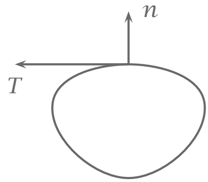
$$\int_S (\partial_{x_2} f_1 - \partial_{x_1} f_2) \, dx = - \int_{\partial S} f \cdot T \, ds$$

$$\overset{8.4}{=} - \int f_1 \cdot T_1 \, ds - \int f_2 \cdot T_2 \, ds$$

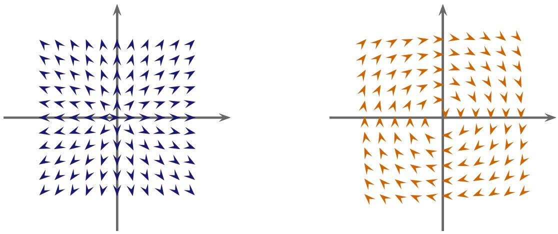
2.) Satz von Gauß in der Ebene

$$\int_S \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial S} f \cdot n \, ds \qquad \multimap$$

n ist der Normaleneinheitsvektor, der ins Äußere von S zeigt: $T = \binom{T_1}{T_2} \implies n = \binom{T_2}{-T_1}$.



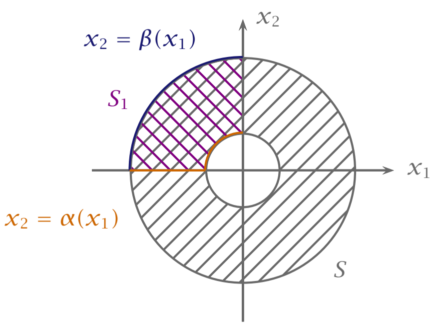
3.6 **▶I** *Beispiel* $D = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = a\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$, $S = K_1(0)$



$$\int_S \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_S 2a \,\mathrm{d}x = 2a\pi = \int_{\partial S} \left(a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot n + 0 \right) \mathrm{d}s$$

$$\int_S (\partial_{x_2} f_1 - \partial_{x_1} f_2) \,\mathrm{d}x = 2b\pi = -\int_{\partial S} \left(0 + b \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \cdot t \right) \mathrm{d}s$$ **I◀**

3.7 **▶I** *Beispiel* S ist kein Standardbereich.



S_1 ist ein Standardbereich. S ist darstellbar als disjunkte Vereinigung von Standardbereichen. **I◀**

3.8 **Definition** *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Greenscher Bereich, wenn $S = S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_k$, wobei S_j ein Standardbereich ist.* ⋊

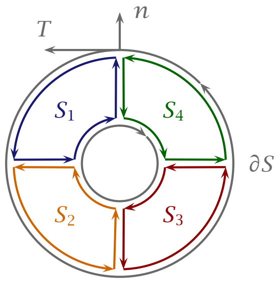
3.9 **Folgerung** *Der Satz von Green*

$$\int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}x = - \int_{\partial S} f \cdot T \,\mathrm{d}s$$

gilt auch in Greenschen Bereichen, wenn ∂S stückweise glatt so parametrisiert ist, dass

$$n = \begin{pmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{pmatrix} \qquad \left(T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \right)$$

in jedem Punkt von ∂S aus S hinaus weist.



Zum Beweis Green gilt in jedem S_j. Wegintegrale über gemeinsame Randteile heben sich weg. ■

3.10 **Satz von Gauß im $\mathbb{R}^3$** *Sei $f \in C^1(D \to \mathbb{R}^3)$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S \subseteq D$ Standardbereich, so dass bei jeder Projektion der untere und obere Rand Flächen sind. Dann gilt*

$$\int_S \nabla \cdot f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial S} f \cdot n \,\mathrm{d}\sigma$$

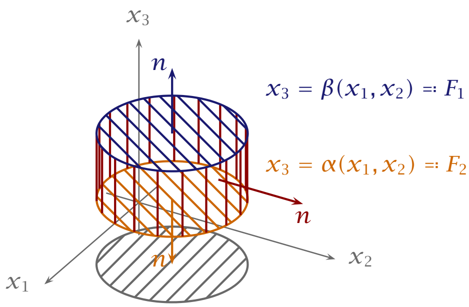
wobei n der Normaleneinheitsvektor ist, der aus S hinaus weist.

Beweis Sei S_3 Projektion von S in x_3-Richtung.

$$\overline{S} = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x) \le x_3 \le \beta(x)\}$$

Zeige:

$$\int_S \partial_{x_3} f_3 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial S} f_3 \cdot n_3 \,\mathrm{d}\sigma$$



Der Normalenvektor auf F_1 ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\|\dots\|}\left(\partial_{x_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta(x_1,x_2)\end{pmatrix} \times \partial_{x_2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta(x_1,x_2)\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\|\dots\|}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1}\beta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2}\beta\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\|\dots\|}\begin{pmatrix} -\partial_{x_1}\beta \\ -\partial_{x_2}\beta \\ 1\end{pmatrix} \\
\implies n_3 &= \frac{1}{\|\dots\|} > 0
\end{aligned}$$

Da die Komponente n_3 positiv ist, zeigt der Normalenvektor nach oben. Nach Voraussetzung muss der Normalenvektor immer aus S hinausweisen. Vergleicht man dies mit der Grafik zeigt sich, dass die Voraussetzung erfüllt ist. Wir haben also den richtigen Normalenvektor gefunden. Analog für F_2 und F_3:

$$\begin{aligned}
F_2: &\qquad n_3 = -\frac{1}{\|\dots\|} \\
F_3: &\qquad n_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} f_3 \cdot n_3 \,\mathrm{d}\sigma &= \int_{F_1} f_3 \cdot \frac{1}{\|\dots\|}\,\mathrm{d}\sigma + \int_{f_2} f_3 \cdot \frac{-1}{\|\dots\|}\,\mathrm{d}\sigma + \int_{F_3} 0\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{S_3} f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta(x_1,x_2)\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\dots\|}\|\dots\|\,\mathrm{d}(x_1,x_2) \\
&\quad - \int_{S_3} f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \alpha(x_1,x_2)\end{pmatrix} \mathrm{d}(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

Linke Seite

$$\int_S \partial_{x_3} f_3 \,\mathrm{d}x = \int_{S_3} \int\limits_{x_3=\alpha(x_1,x_2)}^{\beta(x_1,x_2)} \partial_{x_3} f(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}(x_1,x_2)$$

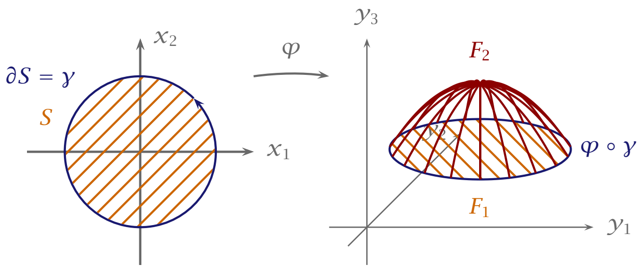
Rechte Seite

$$\int_{S_3} \Big(f_3(x_1,x_2,\beta(x_1,x_2)) - f_3(x_1,x_2,\alpha(x_1,x_2)) \Big)\,\mathrm{d}(x_1,x_2) \qquad \blacksquare$$

3.11 **Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$** *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(D \to \mathbb{R}^3)$, $F \subseteq D$, Fläche mit Parameterdarstellung (φ, S), $S \subseteq \mathbb{R}^2$ Greenscher Bereich mit stückweise glattem ∂S, $\varphi \in C^2(\overline{S} \to \mathbb{R}^3)$. Dann gilt:*

$$\int_F (\nabla \times f)\cdot n\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial F} f \cdot T\,\mathrm{d}s$$

Hierbei mit ∂F so orientiert sein, dass es Bild einer für den Greenschen Satz richtig orientierten Randkurve γ von S ist.



Der Satz sagt aus: Egal wie F (z.B. F_1, F_2) in D liegt, solange der Rand gleich bleibt, bleibt

$$\int_F \nabla \times f\,\mathrm{d}x$$

gleich.

Beweis Sei

$$\int_{\partial F} f \cdot T\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{3} \int_{\varphi\circ\gamma} f_j \cdot T_j\,\mathrm{d}s$$

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f_j \cdot T_j\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f_1(\varphi\circ\gamma(t)) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_1\circ\gamma)(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_a^b f_1(\varphi\circ\gamma(t)) \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\varphi_1(\gamma(t)) \\ \partial_{x_2}\varphi_1(\gamma(t)) \end{pmatrix} \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$\gamma'(t)$ ist der Tangentenvektor von $\gamma(t)$.

$$= \int_{\gamma(t)} (f_1 \circ \varphi) \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\varphi_1 \\ \partial_{x_2}\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot T \,\mathrm{d}s$$

mit dem Satz von Green (8.5)

$$\overset{8.5}{=} \int_S \{\partial_{x_1} \left((f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_2}\varphi_1\right) - \partial_{x_2} \left((f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_1}\varphi_1\right)\} \,\mathrm{d}(x_1, x_2)$$

Nach dem Satz von Schwartz dürfen wir die partiellen Ableitungen vertauschen

$$= \int_S \{\partial_{x_1}(f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_2}\varphi - \partial_{x_2}(f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_1}\varphi\} \,\mathrm{d}(x_1, x_2)$$

$$\overset{x'=(x_1,x_2)}{=} \int_S \left(\sum_{j=1}^{3} (\partial_{y_j} f_1)\, \varphi(x') \cdot \partial_{x_1}\varphi_j(x') \cdot \partial_{x_2}\varphi_1 \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{3} (\partial_{y_j} f_1)\, \varphi(x') \cdot \partial_{x_2}\varphi_j(x') \cdot \partial_{x_1}\varphi_1 \right) \mathrm{d}x'$$

Die Summanden für $j = 1$ heben sich weg.

$$= \int_S \Big(\partial_{y_2} f_1 (\partial_{x_1}\varphi_2 \cdot \partial_{x_2}\varphi_1 - \partial_{x_2}\varphi_2 \cdot \partial_{x_1}\varphi_1)$$
$$+ \partial_{y_3} f_1 (\partial_{x_1}\varphi_3 \cdot \partial_{x_2}\varphi_1 - \partial_{x_2}\varphi_3 \cdot \partial_{x_1}\varphi_1)\Big) \,\mathrm{d}x'$$

Vergleich mit der anderen Seite.

$$\int_F (\nabla \times f) \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \int_S (\nabla \times f) \cdot (\partial_{x_1}\varphi \times \partial_{x_2}\varphi) \,\mathrm{d}(x_1, x_2)$$

Damit wurde bewiesen: In allen Termen, in denen f_1 vorkommt, stimmen linke und rechte Seite überein. Dasselbe für f_2 und f_3. ■

Bemerkung: Aus dem Satz von Stokes 3.11 folgt: $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und konvex, $f \in C^2(D \to \mathbb{R}^3)$. Dann sind äquivalent:

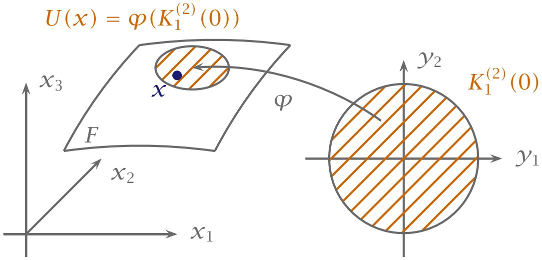
i.) $\nabla \times f = 0$ in D

ii.) f besitzt in D ein Potential

$$\exists\, \Phi \in C^1(D \to \mathbb{R}) : f = \nabla\Phi$$

2.4 Mannigfaltigkeiten

Fläche im $\mathbb{R}^3$



4.1 **Definition** **1.)** *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq k \leq n$), falls zu jedem $x \in S$ eine offene Umgebung $U(x)$ auf S (d.h. $U(x) = O \cap S$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) existiert und eine Abbildung*

$$\varphi_x : K_1^{(k)}(0) \to U(x) \subset O \qquad \left(K_1^{(k)}(0) := \{y \in \mathbb{R}^k : |y| < 1\}\right)$$

mit

a.) *φ_x bijektiv und φ_x^{-1} stetig*

b.) *φ_x stetig differenzierbar*

c.) $\mathrm{Rang}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}) = k$

Das Tupel $(\varphi_x, U(x))$ nennt man Karte.

2.) *Eine Menge*

$$A(S) := \{(\varphi_j, U_j) : 1 \leq j \leq N\} := \left\{(\varphi_{x_j}, U(x_j)) : x_j \in S, 1 \leq j \leq N\right\}$$

mit

$$S = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$$

heißt Atlas von S.

3.) *S ist von der Klasse $m \in N$ (wir schreiben dann: $S \in C^m$) falls ein Atlas $A(S)$ existiert, sodass $\varphi_j \in C^m$.*

Falls $S \in C^m$, betrachten wir nur solche Atlanten.

4.) *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $S = \{x_0, \ldots, x_N\}$ heißt 0-dimensionale Mannigfaltigkeit .* ⋊

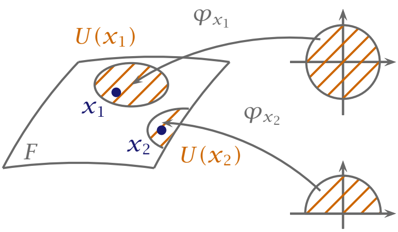
4.2 **Vereinbarung** *Ab jetzt betrachten wir nur C^m Mannigfaltigkeiten, die einen Atlas besitzen.* ⋊

4.3 *Beispiel* Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$ eine Kugel mit Radius r und seien folgende Karten $\varphi_k : K_1^{(2)}(0) \to S$ für $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,2}(y_1, y_2) &\coloneqq \left(y_1, y_2, \pm\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}\right) \\
U_{1,2} &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \gtrless 0\} \\
\varphi_{3,4}(y_1, y_2) &\coloneqq \left(y_1, \pm\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}, y_2\right) \\
U_{3,4} &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 \gtrless 0\} \\
\varphi_{5,6}(y_1, y_2) &\coloneqq \left(\pm\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}, y_1, y_2\right) \\
U_{5,6} &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \gtrless 0\}
\end{aligned}$$

Dann $A(S) = \{(\varphi_j, U_j), 1 \leq j \leq 6\}$ ein Atlas. Also ist S eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas A.

Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand:



4.4 **Definition** **1.)** *$S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ($1 \leq k \leq n$), wenn es zu jedem $x \in S$ eine offene Umgebung $U(x) = O \cap S$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gibt und eine Abbildung*

$$\varphi_x : K_1^{(k)}(0) \to U(x) \text{ oder } \varphi_x : K_1^{(k)+}(0) \to U(x)\,,$$
$$K_1^{(k)+}(0) \coloneqq \{y \in K_1^{(k)}(0) : y_k \geq 0\}, k \geq 2$$

bzw. im Fall $k = 1$

$$\varphi_x :]-1, 1[\to U(x) \text{ oder } \varphi_x : [0, 1[\to U(x) \text{ oder } \varphi_x :]-1, 0] \to U(x)$$

mit den Eigenschaften wie in 4.1 existiert. Die Begriffe »Atlas« und »C^m« werden analog definiert.

2.) *$x \in S$ heißt Randpunkt von S[2], falls eine Karte $(\phi_x, U(x))$ existiert, sodass*

$$\varphi_x : K_1^{(k)+}(0) \to U(x)$$

[2] Vorraussetzung: $\partial S \neq \emptyset$

bzw.

$$\varphi_x : \begin{matrix}[0,1[\\ ]-1,0]\end{matrix} \to U(x)$$

und

$$\varphi_x^{-1}(x) \in \{x \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\} \quad (k \geq 2)$$

bzw.

$$\varphi_x^{-1}(x) = 0 \quad (k = 1).$$

Die Menge aller Randpunkte ist ∂S. ⋊

4.5 *Bemerkung:* Die Festlegung $x \in \partial S$ hängt nicht von der Wahl der Karte ab. Sind (φ_1, U_1), (φ_2, U_2) zwei Karten mit $x \in U_1 \cap U_2$, so bildet

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : K_1^{(k)+}(0) &\to K_1^{(k)+}(0) \\ [0,1[&\to]-1,0] \\ &\vdots \end{aligned}$$

innere Punkte auf innere Punkte ab (Ohne Beweis). Also auch Randpunkte auf Randpunkte. ⊸

4.6 **Satz** *Ist $S \in C^m$ eine k-dimesionale Mannigfaltigkeit mit Rand im $\mathbb{R}^n$ ($k \geq 1$), so ist ∂S eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^m ohne Rand. Insbesondere ist $\partial(\partial S) = \emptyset$.*

BEWEIS $k = 1$: $x \in \partial S \iff x = \varphi_x(0)$. Da es nur endlich viele Karten gibt, bekommt man endlich viele Punkte in ∂S, also ergibt sich eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit.

$k = 2$: Zu $x \in \partial S$ existiert eine Karte $(\varphi_x, U(x))$, $\varphi_x \in C^m$, $\varphi_x^{-1} \in C^m$. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x(y_1, \ldots, y_{k-1}) &:= \varphi_x(y_1, \ldots, y_{k-1}, 0) \\ \tilde{U}(x) &:= U(x) \cap \partial S = O \cap S \cap \partial S = O \cap \partial S\,, \quad O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen.} \end{aligned}$$

$$\implies (\tilde{\varphi}_x, \tilde{U}(x)) \text{ ist Karte.}$$

endlich viele überdecken ∂S

$$\tilde{\varphi}_x \in C^m\,, \quad \tilde{\varphi}_x^{-1} = \underbrace{\left(\varphi_x^{-1}\Big|_{\partial S}\right)}_{\text{erste } k-1 \text{ Koordinaten}} \in C^m$$

Alle $\tilde{\varphi}_x$ sind auf $K^{(k-1)}(0)$ definiert, also kein Rand. ∎

4.7 **Satz** *Sei $k \geq 1$ und $S \in C^1$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Sei außerdem $x_0 \in S$ mit einer Karte (φ_1, U_1), $x_0 \in U_1$. Dann heißt*

$$T_{x_0} := \mathrm{LH}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\left(\varphi_1^{-1}(x_0)\right), \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k}\left(\varphi_1^{-1}(x_0)\right)\right\}$$

Tangentialraum in x_0. Es gilt

a.) $\dim T_{x_0} = k$,

b.) *T_{x_0} ist unabhängig von der Karte.*

Beweis **a.)**

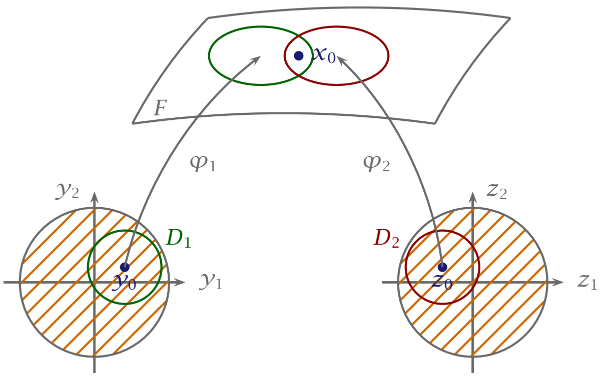
$$\mathrm{Id} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 : K_1^{(k)}(0) \to K_1^{(k)}(0) : y \to y$$

$$\implies E_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Rang}=k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{Id}}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathrm{Id}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \mathrm{Id}}{\partial y_k} \end{pmatrix}(y_0), \quad y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x_0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} \end{pmatrix}(y_0)}_{\implies \mathrm{Rang} \leq k}$$

$$\implies \dim T_{x_0} = k$$

b.)



Seien (φ_j, U_j), $j = 1, 2$ zwei Karten mit $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Setze $D_j := \varphi_j^{-1}(U_1 \cap U_2)$.

Dann ist $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : D_2 \to D_1$ bijektiv.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i}(z_0) &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\varphi_1 \circ \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\right)\right)(z_0) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \underbrace{\left(\frac{\partial \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\right)}{\partial z}(z_0) \right)_{j\text{-te Koord.}}}_{:=\lambda_j} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \in T_{x_0} \\
\Longrightarrow \mathrm{LH} &\left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}(z_0), \dots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_k}(z_0) \right\} \subset T_{x_0}
\end{aligned}$$

Betrachtet man $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, ergibt sich die andere Richtung und damit $\mathrm{LH}\{\dots\} = T_{x_0}$
■

4.8 **Orientierung von Karten** **1.)** *Zwei Basen $\{b_1, \dots, b_k\}, \{c_1, \dots, c_k\}$ eines k-dimensionalen Raumes heißen gleich orientiert, falls*

$$b_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} c_i \quad \wedge \quad \det(\alpha_{ji}) > 0$$

2.) *Sei $S \in C^1$. Zwei Karten (φ_1, U_1) heißen gleich orientiert, falls*

$$\det\left(\frac{\partial \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\right)_j}{\partial z}(z_0) \right) > 0 \text{ für } z_0 \in D_2 \text{(vgl. vorher)}$$

(Vorzeichen der Determinante ist auf D_2 konstant, da stetig und immer $\neq 0$) ⋊

Korrektur zu 4.1, Punkt 3: $S \in C^m$, $m \geq 1$, falls $\varphi_j \in C^m$ $(j = 1, \dots, N)$ und

Damit wird in 4.7 $\dim T_{x_0} = k$ offensichtlich, da

$$T_{x_0} = \mathrm{LH}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\left(\varphi^{-1}(x_0)\right), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\left(\varphi^{-1}(x_0)\right) \right\}$$

4.9 **Orientierung von Mannigfaltigkeiten** **1.)** *Zwei Karten $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ heißen kompatibel, falls $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder falls sie gleich orientiert sind.*

2.) *Ein Atlas heißt orientiert, wenn alle seine Karten paarweise kompatibel sind.*

3.) *Eine Mannigfaltigkeit $S \in C^1$ heißt orientierbar, falls sie mindestens einen orientierten Atlas besitzt.*

4.) *Zwei orientierte Atlanten $A(S)$, $\widetilde{A}(S)$ heißen kompatibel , falls $A(S) \cup \widetilde{A}(S)$ orientiert ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller orientierten Atlanten von S. Jede Äquivalenzklasse heißt Orientierung von S.* ⋊

4.10 ▶| *Beispiel* **1.)**

$$S = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 3 \right\}$$

$$\varphi_1(y) \coloneqq \frac{3}{2}(y+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in K_1^{(1)}(0) =]-1,1[\ ,\ U_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 < t < 3 \right\}$$

$$\varphi_2(y) \coloneqq z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in [0,1[\ ,\ U_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 \leq t < 1 \right\}$$

Kompatibilität? $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(z) = \frac{2}{3} z - 1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) = \frac{2}{3} > 0$$

$\Longrightarrow$ gleich orientiert.

$$\varphi_3(z) \coloneqq (3-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in [0,1[, U_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 2 < t \leq 3 \right\}$$

Kompatibilität? $U_3 \cap U_2 = \emptyset \quad \checkmark$

$$U_3 \cap U_1 \neq \emptyset$$
$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3(z) = \frac{2}{3}(3-z) - 1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3) = -\frac{2}{3} < 0$$

$\Longrightarrow$ nicht gleich orientiert. Stattdessen:

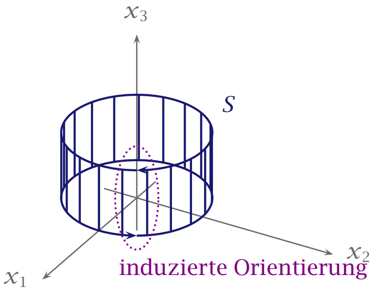
$$\varphi_3(z) \coloneqq (3+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in]-1,0], U_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 2 < t \leq 3 \right\}$$

$\Longrightarrow$ (φ_1, U_1), (φ_3, U_3) gleich orientiert.

$\Longrightarrow$ $A(S) = \{(\varphi_j, U_j), j = 1,2,3\}$ ist orientierbarer Atlas von S.

2.)

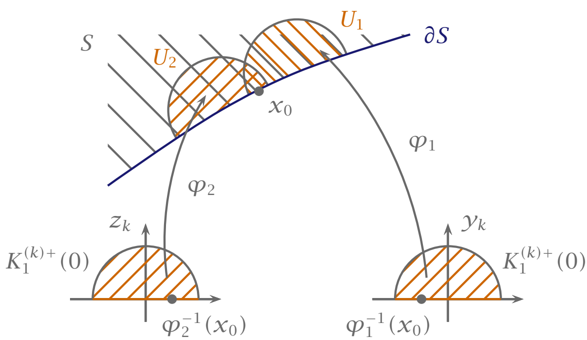
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \wedge 0 \le x_3 \le 1 \right\}$$



∂S besteht aus zwei Kreisen. S ist orientierbar (ohne Beweis). Durch die Orientierung von S wird eine Orientierung von ∂S induziert.

3.) Möbius-Band: Nicht orientierbare Mannigfaltigkeit.

4.11 **Definition** *Sei $S \in C^1$ orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $k \ge 2$, $A(S)$ orientierter Atlas. Durch die Konstruktion von 4.6 wird ein orientierter Atlas $A(\partial S)$ gegeben. Die dadurch definierte Orientierung von ∂S heißt verträglich mit der Orientierung von S.*



Wir wissen: $x_0 \in \partial S$, $x_0 \in U_1 \cap U_2$, $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2) \in A(S)$ orientiert

$$\Longrightarrow \det\left(\frac{\partial(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)}{\partial z}\right) > 0$$

Sei $\psi \coloneqq \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 . \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$. ψ *bildet Randpunkte auf Randpunkte ab.*

$$\psi_k(z_1, \dots, z_{k-1}, 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z_j}\psi_k(\varphi_2^{-1}(x_0)) = 0\,, \quad j = 1, \dots, k-1$$

ψ *bildet innere Punkte auf innere Punkte ab.*

$$\psi_k(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k > 0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z_k}\psi_k(\varphi_2^{-1}(x_0)) > 0$$

$$\Longrightarrow \; 0 < \det\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \det\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \psi_k}{\partial z_{k-1}} & \frac{\partial \psi_k}{\partial z_k} \end{pmatrix}$$

Nach dem Entwicklungssatz nach der k*-ten Zeile:*

$$= (-1)^{2k}\frac{\partial \psi_k}{\partial z_k}(\varphi_2^{-1}(x_0)) \det\left(\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}\right)(\varphi^{-1}(x_0))$$

Zugehörige Karten $(\tilde{\varphi}_j, \tilde{U}_j)$ *des Randes* ∂S*:*

$$\tilde{\varphi}_j(y_1, \dots, y_{k-1}) \coloneqq \varphi_j(y_1, \dots, y_{k-1}, 0)\,, \quad \tilde{U}_j = U_j \cap \partial S$$

Aus 4.6: $\{(\tilde{\varphi}_1, \tilde{U}_1), \dots, (\tilde{\varphi}_n, \tilde{U}_n)\}$ *ist Atlas von* S*. Es gilt*

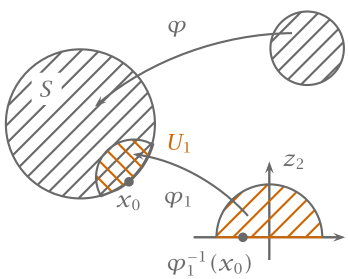
$$(\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2)_i(z_1, \dots, z_{k-1}) = \underbrace{(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)_i}_{\psi_i}(z_1, \dots, z_{k-1}, 0)\,, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

$$\Longrightarrow \; \det\left(\frac{\partial(\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2)}{\partial(z_1, \dots, z_{k-1})}\right) = \det\left(\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_{k-1})}{\partial(z_1, \dots, z_{k-1})}\right) > 0$$

$\Longrightarrow$ $\{(\tilde{\varphi}_1, \tilde{U}_1), \dots, (\tilde{\varphi}_N, \tilde{U}_N)\}$ *ist orientierter Atlas von* ∂S. ⋊

4.12 ▶| *Beispiel* $S = \overline{K_1^{(2)}(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\partial S = \{\binom{x_1}{x_2} : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

1.) Sei $(\varphi, U) : \varphi\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_1}{x_2}$, $U = K_1^{(2)}(0)$. Annahme: $A(S)$ ist orientierter Atlas der (φ, U) enthält.



$\implies$ verträgliche Orientierung von ∂S im Gegenuhrzeigersinn.

Falls $A(S)$ die Karte $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$ mit $\tilde{\varphi}\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ enthält, ist die verträgliche Orientierung von ∂S im Uhrzeigersinn.

2.5 Zerlegung der Eins

5.1 **Definition** *Sei $\psi \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (oder was anderes). Der Träger (engl.: support) von ψ*

$$\operatorname{supp}\psi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) \neq 0\}}.$$

5.2 **Satz** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ offene Überdeckung von M. Dann existiert eine abzählbare oder endliche Menge $\{\psi_j : C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})\}$ mit*

- **i.)** $\forall\, j\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \psi_j(x) \leq 1$.
- **ii.)** $\forall\, j : \operatorname{supp}\psi_j$ *ist kompakt.*
- **iii.)** $\forall\, j\, \exists\, \alpha \in A : \operatorname{supp}\psi_j \subseteq O_\alpha$.
- **iv.)** $\forall\, x \in M : \#\{j : \psi_j(x) \neq 0\} < \infty$.
- **v.)** $\forall\, x \in M : \sum_j \psi_j(x) = 1$.

Die Familie $\{\psi_j\}$ heißt Zerlegung der Eins bezüglich $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$.

5.3 **Satz** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \cap M = \emptyset$. Dann ist der Abstand zwischen K und M definiert als*

$$\mathrm{d}(K, M) := \inf\{|x - y| : x \in K, y \in M\} > 0$$

und dieses Infimum ist ein Minimum.

BEWEIS Seien (x_n) Folge in K, (y_n) Folge in M, $|x_n - y_n| \to \mathrm{d}(K, M)$.

$$K \text{ kompakt } \implies x_{n_k} \to x \in K$$

$$\implies |y_{n_k}| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k}| \implies (y_{n_k}) \text{ ist beschränkt.}$$

$$\overset{\text{Bolzano-}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\implies}} y_{n_k} \to y \in \mathbb{R}^n$$

$$M \text{ abgeschlossen } \implies y \in M$$

$$\implies x \in K, y \in M, \mathrm{d}(x, y) = \lim_{\ell \to \infty} |x_{n_{k_\ell}} - y_{n_{k_\ell}}| = \mathrm{d}(K, M).$$ ■

5.4 **Satz** **1.)**

$$g_1(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\implies g_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}),\, g_1 \geq 0,\, \operatorname{supp}(g_1) = [0, \infty[.$$

2.)

$$g_2(x) := g_1(1 - |x|^2)\,, \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}),\, g_1 \geq 0 \textit{ für } x \in \mathbb{R}^n,\, \operatorname{supp}(g_2) = \overline{K_1^{(n)}(0)}.$$

3.)

$$g_3(x) := \frac{1}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_2(x)\,\mathrm{d}x} g_2(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann zusätzlich

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_3(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

4.) *Sei* $\delta > 0$,

$$g_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} g_3\left(\frac{x}{\delta}\right)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies g_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}),\, g_\delta \geq 0 \textit{ für } x \in \mathbb{R}^n,\, \operatorname{supp}(g_\delta) = \overline{K_\delta(0)},\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_3(x)\,\mathrm{d}x = 1. \quad \rtimes$$

5.5 **Satz** *Sei* $O \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $K \subseteq O$ *kompakt. Dann existiert* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *mit* $\varphi(x) \geq 0$ *für* $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq O$, $\varphi(x) = 1$ *auf* K.

Beweis Sei

$$\delta := \frac{1}{4}\mathrm{d}(K, \mathbb{R}^n \setminus O) \overset{5.3}{>} 0.$$

Setze $K_j := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, K) \leq \delta\}$. Dann $K_\delta \subseteq O$, K_δ abgeschlossen. Damit hat[3]

$$\varphi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_\delta}(y)\, g_\delta(y - x)\,\mathrm{d}\mu_y$$

die gewünschten Eigenschaften.

- $\varphi(x) \geq 0 \quad \checkmark$
- $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, K) \leq 2\delta\} \subseteq O \quad \checkmark$

---

[3] $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $x \in K : \varphi(x) = \int\limits_{y \in K_\delta} 1 \cdot g_\delta(y-x)\,\mathrm{d}\mu_y = \int\limits_{y \in \overline{K_\delta(x)} \subseteq K_\delta} g_\delta(y-x)\,\mathrm{d}\mu_y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\delta(y)\,\mathrm{d}y = 1 \quad \checkmark$
- $\varphi \in C^\infty$ (ohne Beweis) $\quad\checkmark$ ■

5.6 **Satz** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq O$ kompakt. Dann existiert $O' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $K \subseteq O' \subseteq \overline{O'} \subseteq O$.*

BEWEIS Sei $\delta \coloneqq \mathrm{d}(K, \mathbb{R}^n \setminus O) \overset{5.3}{>} 0$ falls $O \neq \mathbb{R}^n$, $\delta = 1$ falls $O = \mathbb{R}^n$.

$$O' \coloneqq \bigcup_{x \in K} K_{\delta/2}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x,K) \le \delta/2\}$$

$$\implies \begin{cases} O' \text{ offen (Vereinigung offener Mengen)} \\ K \subseteq O' \\ \overline{O'} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x,K) \le \delta/2\} \subseteq O \end{cases}$$ ■

5.7 **Satz** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\{O_1, \dots, O_N\}$ offene Überdeckung von K. Dann existieren $O_1', \dots, O_N' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit*

$$\overline{O_j'} \subseteq O_j\,, \quad O_j' \textit{ beschränkt}\,, \quad K \subseteq \bigcup_{j=1}^N O_j$$

BEWEIS

$$K_1 \coloneqq K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=2}^N O_j\right) \quad \text{ist kompakt.}$$

$K_1 \subseteq O_1$, da $K_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus O_1) = K \cap \bigcap\limits_{j=1}^N \mathbb{R}^n \setminus O_j = \emptyset$. Wähle $O_1' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $K_1 \subseteq O_1' \subseteq \overline{O_1} \subseteq O_1$ (5.6).

$\implies \{O_1', O_2, O_3, \dots, O_N\}$ überdeckt K wegen

$$\begin{aligned} \emptyset &= K_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus O_1') \\ &= K \cap (\mathbb{R}^n \setminus O_1') \cap \left(\bigcap_{j=2}^N \mathbb{R}^n \setminus O_j\right) \\ &= K \cap \mathbb{R}^n \setminus \left(O_1' \cup \bigcup_{j=2}^N \mathbb{R}^n \setminus O_j\right) \end{aligned}$$

und O_1' beschränkt, $\overline{O_1'} \subseteq O_1$. Sukzessive O_j durch O_j' ersetzen $\implies$ fertig. ■

Beweis von 5.2 **Fall 1:**

M ist kompakt.

$$\implies \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A : M \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} O_{\alpha_j}$$

Wähle $O'_{\alpha_j} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, O'_{α_j} beschränkt, $\overline{O'_{\alpha_j}} \subseteq O_{\alpha_j}$ mit $M \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} O_{\alpha_j}$ (5.7). $\overline{O'_{\alpha_j}}$ beschränkt und abgeschlossen $\overset{\text{Borel}}{\implies}$ kompakt.

$$\implies \varphi_{\alpha_j} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \text{ mit } \varphi_{\alpha_j}(x) = 1 \text{ für } x \in \overline{O'_{\alpha_j}}, \operatorname{supp}\varphi_{\alpha_j} \subseteq O_{\alpha_j}, \varphi_{\alpha_j} \geq 0.$$

Setze

$$\tilde{\psi}_j(x) \coloneqq \frac{\varphi_{\alpha_j}(x)}{\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_{\alpha_k}(x)}$$

$\implies$ i.,ii.,iii.,iv.,v. erfüllt. Es fehlt $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$.

5.5 $\implies$ Es existiert $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit $\varphi = 1$ auf M_N und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} O'_{\alpha_j}$. Setze $\psi_j(x) \coloneqq \varphi(x)\tilde{\psi}_j(x)$.

$\implies$ i.,ii.,iii.,iv.,v. erfüllt und $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$.

Fall 2:

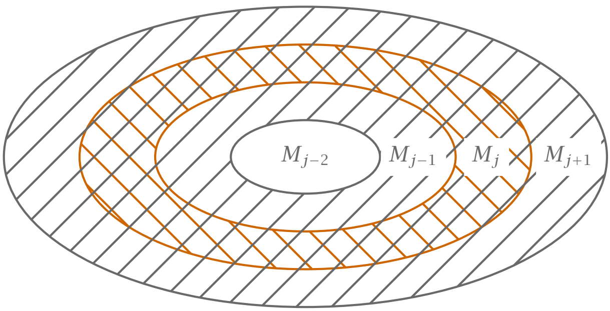
M ist offen.

$$M_j \coloneqq \left\{ x \in M : |x| \leq j \land \mathrm{d}(x, \mathbb{R}^n \setminus M) \geq \frac{1}{j} \right\}$$

Also ist M_j kompakt und $M = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j$. Für festes j:

$$\{O_\alpha \cap \operatorname{int}(M_{j+1}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M_{j-2}) : \alpha \in A\}$$

ist eine offene Überdeckung von $M_j \setminus \operatorname{int}(M_{j-1}) = M_j \cap \mathbb{R}^n \setminus M_{j+1}$.



Nach Schritt 1 ist $\{\psi_{jk} : k = 1, \ldots, N_j\}$ eine Zerlegung der Eins auf $M_j \setminus \operatorname{int}(M_{j-1})$. Definiere

$$\sigma(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_j} \psi_{jk}(x).$$

Nach Konstruktion gilt: Zu jedem $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U(x)$, sodass die Summe $U(x)$ endlich ist ($x \notin M \implies \psi_{jk}(x) = 0$).

$$\implies \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

Außerdem $\sigma(x) \geq 1$ für $x \in M$.

$$\implies \left\{ \frac{1}{\sigma} \psi_{jk} : j \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq N_j \right\}$$

ist die Zerlegung der Eins auf M.

Fall 3:

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$M \subseteq O := \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$$

mit $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ überdeckt O. Wende Fall 2 an. ■

2.6 Integration auf Mannigfaltigkeiten

6.1 **Definition** *Sei $1 \leq k \leq n$ und $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist der k-Inhalt aufgespannten Parallelepipeds definiert durch*

$$V^{(k)}(v_1, \ldots, v_k) := \left(\det \left(\underbrace{\underbrace{(v_1, \ldots, v_k)^*}_{k \times n} \cdot \underbrace{(v_1, \ldots, v_k)}_{n \times k}}_{k \times k} \right) \right)^{1/2}$$

6.2 *Bemerkung:* **1.)** Sei $B := (v_1, \ldots, v_k)$.

$$B^* B \text{ symmetrisch} \implies \det(B^* B) = \text{ Produkt der Eigenwerte } \lambda_1, \ldots, \lambda_k$$

Für $x \in \mathbb{R}^k$: $\langle B^* Bx, x \rangle_{\mathbb{R}^k} = \langle Bx, Bx \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$.

$$\implies \lambda_j \geq 0 \left(x \text{ ist Eigenvektor} : 0 \leq \langle B^* Bx, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \right).$$

2.) $k = n$: (Es gilt $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ und für A hermitesch $\det A^* = \det A$)

$$\begin{aligned} V^{(n)}(v_1, \ldots, v_n) &= \left(\det\left((v_1, \ldots, v_n)^* \cdot (v_1, \ldots, v_n)\right)\right)^{1/2} \\ &= |\det(v_1, \ldots, v_n)| \end{aligned}$$

3.) $k = 1$:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(v) &= (\det(v^* \cdot v))^{1/2} \\ &= \sqrt{v_1^1 + \ldots + v_n^2} = \|v\| \end{aligned}$$

4.) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear abhängig $\implies$ Rang$(v_1, \ldots, v_k) < k$.

$$\implies V^{(k)}(v_1, \ldots, v_k) = 0$$

5.) Sei S eine C^1-Mannigfaltigkeit, (φ, U) eine Karte, $x_0 \in U$, $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \coloneqq \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\right)$$

Dann ist

$$\left[\det\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)\right]^{1/2}$$

der k-Inhalt der Parallelepipeds, das von den Tangentialvektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}$ aufgespannt wird. ⊸

6.3 **Definition** *Eine Mannigfaltigkeit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt wenn sie als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.* ⋊

6.4 ▶ *Beispiel* **1.)** $S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 = 1 \wedge x_{k+2} = \ldots = x_k = 0\}$ ist kompakt, k-dimensional, $\partial S \neq \emptyset$.

2.) $S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ nicht kompakt, $\partial S = \emptyset$.

3.) $S \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \wedge x_n \leq 0\}$ kompakt. $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \wedge x_n = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \wedge x_n < 0\}$. ◀

6.5 **Definition** *Sei S kompakte, k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit mit Atlas $A(S) = \{(\varphi_j, U_j) : j = 1, \ldots, N\}$. Seien $O_1, \ldots, O_N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $U_j = O_j \cap S$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ Zerlegung der Eins auf S bezüglich $\{O_1, \ldots, O_N\}$. Für $f \in C(S \to \mathbb{R})$ ist*

$$\begin{aligned} \int_S f \, \mathrm{d}V^{(k)} &\coloneqq \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \underbrace{\psi_j \cdot f}_{\operatorname{supp}(\psi_j \cdot f) \subseteq U_j} \, \mathrm{d}V^{(k)} \\ &\coloneqq \sum_{j=1}^N \int_{y \in K_1^{(k)}(0)} (\psi_j \cdot f)(\varphi_j(y)) \left[\det\left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right)^* \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right)\right)\right]^{1/2} \mathrm{d}y \end{aligned}$$

(oder auch Integral über $y \in K_1^{(k)+}(0)$) ⋊

6.6 **Satz** *Die Defintion $\int_S f \, \mathrm{d}V^{(k)}$ ist unabhängig von der Wahl des Atlas, der O_j und der Zerlegung der Eins.*

BEWEIS Sei $\widetilde{A}(S) = \{(\widetilde{\varphi}_j, \widetilde{U}_j) : j = 1, \dots, M\}$ weiterer Atlas und $\{\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_M\}$ entsprechende Zerlegung der Eins. Dann

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \psi_j \cdot f \,\mathrm{d}V^{(k)} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \int_{U_j} \widetilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f \,\mathrm{d}V^{(k)} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \int_{y \in \varphi_j^{-1}(U_j \cap \widetilde{U}_\ell)} \left(\widetilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f\right)(\varphi(y)) \left[\det\left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right)^* \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right)\right)\right]^{1/2} \mathrm{d}V^{(k)}
\end{aligned}$$

Sei j, ℓ mit $U_j \cap \widetilde{U}_\ell \neq \emptyset$, $\Phi_{\ell j} \coloneqq \widetilde{\varphi}_\ell \circ \varphi_j$, $\varphi_j^{-1}(U_j \cap \widetilde{U}_\ell) \to \varphi_\ell^{-1}(U_j \cap \widetilde{U}_\ell)$ und $\Phi_{\ell j}^{-1} \coloneqq \varphi_j^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_\ell$. Seien nun $z = \Phi_{\ell j}(y)$ und $y = \Phi_{\ell j}^{-1}(z)$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \int_{y \in \varphi_\ell^{-1}(U_j \cap \widetilde{U}_\ell)} \left(\widetilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f\right) \underbrace{(\varphi(\Phi_{\ell j}^{-1}(z)))}_{\widetilde{\varphi}_\ell(z)} \\
&\qquad \left[\det\left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(\Phi_{\ell j}^{-1}(z))\right)^* \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(\dots)\right)\right)\right]^{1/2} \left|\det\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}^{-1}}{\partial z}\right)\right| \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\varphi_j = \widetilde{\varphi}_\ell \circ \Phi_{\ell j}$

$$\begin{aligned}
&\implies \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y)\right) = \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial z}(\Phi_{\ell j}(y))\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y}(y)\right) \\
&\implies \det\left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(\Phi_{\ell j}^{-1}(z))\right)^* \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(\dots)\right)\right) \\
&\quad = \det\left(\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y}(\Phi_{\ell j}^{-1}(z))\right)^* \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial z}(z)\right)^* \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial z}(z)\right) \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y}(\Phi_{\ell j}^{-1}(z))\right)\right) \\
&\quad = \det\left(\left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial z}(z)\right)^* \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial z}(z)\right)\right) \det\left(\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y}(\Phi_{\ell j}^{-1}(z))\right)\right)^2 \\
&\quad = \sum \sum \int_{z \in \widetilde{\varphi}_\ell^{-1}(U_j \cap \widetilde{U}_\ell)} \left(\widetilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f\right)(z) \left[\det\left(\left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial y}\right)^* \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}_\ell}{\partial y}\right)\right)\right]^{1/2} \\
&\qquad\qquad \left|\det\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}^{-1}}{\partial y}(\Phi_{\ell j}^{-1}(z))\right)\right| \left|\det\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}^{-1}}{\partial z}(z)\right)\right| \mathrm{d}z \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \int_{\widetilde{U}_\ell} \widetilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f \,\mathrm{d}V^{(k)} \\
&\quad = \sum_{\ell=1}^{M} \int_{\widetilde{U}_\ell} \widetilde{\psi}_\ell \cdot f \,\mathrm{d}V^{(k)}
\end{aligned}$$

=Definition des Integrals $\int_S f \, \mathrm{d}V^{(k)}$ mit Hilfe des Atlas $\widetilde{A}(S)$.

6.7 ▶| *Beispiel* Sei $D = \overline{K_1^{(k)}(0)}$, $\varphi \in C^1(D \to \mathbb{R}^n)$, $\varphi : D \to \varphi(D)$ bijektiv, φ^{-1} stetig, $\operatorname{Rang}(\partial_y \varphi) = k$, $S \coloneqq \varphi(D)$. Dann ist S kompakte k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit. Für $f \in C(S \to \mathbb{R})$ gilt

$$\int_S f \, \mathrm{d}V^{(k)} = \int_D f(\varphi(y)) \left[\det \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) \right]^{1/2} \mathrm{d}y$$ |◀

2.7 Differentialformen

7.1 **Vereinbarung** *Im Folgenden immer: S ist eine kompakte orientierbare k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $A(S) = \{(\varphi_j, U_j), 1 \le j \le N\}$ und passender Zerlegung der Eins $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$.* ⋊

7.2 **Arbeit** *Sei $n = 3$, $k = 1$, $F \in C(S \to \mathbb{R}^3)$. Die Arbeit längs S im Kraftfeld F ist gegeben durch*

$$A \coloneqq \int_S \langle F, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)}$$

wobei t_0 der Tangenteneinheitsvektor ist.

$$= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \psi_j \langle F, t_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(1)}$$

$$= \sum_{j=1}^N \int\limits_{\substack{y \in]-1,1[\\ \vee y \in]-1,0] \\ \vee y \in [0,1[}} \psi_j(\varphi_j(y)) \left\langle F(\varphi_j(y)), \frac{\varphi_j'(y)}{\|\varphi_j'(y)\|} \right\rangle \left[\det \left(\left(\varphi_j'(y) \right)^* \left(\varphi_j'(y) \right) \right) \right]^{1/2} \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{j=1}^N \int\limits_{\dots} \psi_j(\varphi_j(y)) \left(\sum_{k=1}^N F_k(\varphi_j(y)) \varphi_{jk}'(y) \right) \mathrm{d}y$$ ⋊

7.3 **Fluss** *Sei $n = 3$, $k = 2$, $V \in C(S \to \mathbb{R}^3)$. Der Fluss von V durch S ist definiert durch*

$$F \coloneqq \int_S \langle V, n_0 \rangle \, \mathrm{d}V^{(k)}$$

wobei n_0 der Normaleneinheitsvektor ist.

$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\substack{y\in K_1^{(2)}(0)\\ \vee y\in K_1^{(2)+}(0)}} \psi_j(\varphi_j(y))\Bigg(V_1(\varphi_j(y)) \cdot \det\left(\frac{\partial(\varphi_{j_2},\varphi_{j_3})}{\partial y}\right) + V_2(\varphi_j(y)) \cdot \det\left(\frac{\partial(\varphi_{j_3},\varphi_{j_1})}{\partial y}\right) + V_3(\varphi_j(y)) \cdot \det\left(\frac{\partial(\varphi_{j_1},\varphi_{j_2})}{\partial y}\right)\Bigg) \mathrm{d}y$$

7.4 **Definition** *Sie $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Differentialform in O oder k-Form in O ist eine Abbildung*

$$\omega : \left\{\begin{matrix} k\text{-dim. kompakten orientierbaren} \\ C^1\text{-Mannigfaltigkeiten in } O \end{matrix}\right\} \to \mathbb{R}$$

symbolisch gegeben durch

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k}(x)\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

$a_{i_1,\dots,i_k} \in C(S \to \mathbb{R})$ *mit*

$$\omega(S) := \int_S \omega := \sum_{j=1}^{N} \int_{D_j} \left(\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} (\psi_j \cdot a_{i_1,\dots,i_k})(\varphi_j(y))\right) \cdot \det\left(\frac{\partial(\varphi_{ji_1},\dots,\varphi_{ji_k})}{\partial y}\right) \mathrm{d}y$$

$D_j = K_1^{(k)}(0)$ *oder* $\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1} \\ \vdots \\ \varphi_{j_k} \end{pmatrix}$. *Eine* 0*-Form in O ist gegeben durch $a \in C(O \to \mathbb{R})$ und*

$$\omega(S) := \sum_{j=1}^{N} a(x_j) =: \int_S \omega$$

ω ist von der Klasse C^m, falls $a_{i_1,\dots,i_k} \in C^m(O \to \mathbb{R})$. Das bedeutet, ω ist durch Vorgabe der $a_{i_1,\dots,i_k}$ definiert.

7.5 *Bemerkung:* Die Definition von $\int_S \omega$ ist unabhängig vom Atlas und der Zerlegung der Eins, falls der neue Atlas gleich orientiert wie der ursprüngliche ist.

7.6 *Beispiel* Seien $n = 3$, $k = 2$, $O \subseteq R^3$, $V \in C(O \to R^3)$.

$$\omega := V_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \implies \omega(S) = \text{Fluss von V durch S}$$

7.7 *Eigenschaften:* Sei $k \geq 2$.

1.) Falls $\omega = a(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ und $i_j = i_\ell$ für ein Paar (j,ℓ) mit $j \neq \ell$. Dann ist $\omega = 0$. Insbesondere $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$.

2.)

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_\ell} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \\ = -\,&\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_\ell} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \end{aligned}$$

BEWEIS **1.)** Sieht man direkt aus

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{\partial y}\right) = 0$$

wobei die Spalten i_j und i_ℓ gleich sind.

2.) Folgt aus: Vertauscht man in der Matrix A zwei Spalten, so wird $\det A$ mit -1 multipliziert. ∎

7.8 *Lineare Struktur:* Für k-Formen ω_1, ω_2 und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} (c_1\omega_1 + c_2\omega_2)(S) &= \int_S (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) \\ &\coloneqq c_1 \int_S \omega_1 + c_2 \int_S \omega_2 = c_1\omega_1(S) + c_2\omega_2(S) \end{aligned}$$ ⊸

7.9 ▶| *Beispiel* $\omega = 1 \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + 1 \cdot \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \implies \omega = 0.$ |◀

7.10 **Definition** *Es sei $I = (i_1 \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Dann heißt I wachsender Index. Wir setzen*

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\coloneqq \{I : I \text{ wachsender Index der Länge } k\} \\ \mathrm{d}x_I &\coloneqq \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\,, \quad \text{mit } I = (i_1, \ldots, i_k) \end{aligned}$$

$\mathrm{d}x_I$ *mit* $I \in \mathcal{G}^{(k)}$ *heißt k-Grundform im* $\mathbb{R}^n$. ⋊

7.11 **Satz** **1.)** *Ist*

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I(x)\,\mathrm{d}x_I = 0$$

so folgt $a_I = 0$ *für* $I \in \mathcal{G}^{(k)}$.

2.) *Jede k-Form ω in O besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I\,\mathrm{d}x_I$$

d.h. $(a_I : I \in \mathcal{G}^{(k)})$ *sind die* $\binom{n}{k}$ *Koordinaten von* ω. *Die Abbildung*

$$\omega \mapsto (a_I : I \in \mathcal{G}^{(k)}) \text{ mit } \omega = \sum a_I\,\mathrm{d}x_I$$

ist bijektiv und linear.

BEWEIS **1.)** Ann: $\omega = 0$, aber $a_{I_0} \neq 0$ für mindestens ein $I_0 \in \mathcal{G}^{(k)}$. Sei $x_0 \in O$ mit $a_{I_0}(x_0) \neq 0$, o.B.d.A. $a_{I_0}(x_0) > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit

$$a_{I_0}(x) \geq \frac{1}{2} a_{I_0}(x_0) > 0 \text{ für } x \in K_\delta(x_0), \overline{K_\delta(x_0)} \subseteq O$$

Wähle $D \coloneqq \overline{K_1^{(k)}(0)}$.

$$\varphi(y) \coloneqq x_0 + \delta \sum_{\ell=1}^{k} y_\ell e_{j_\ell}$$

wobei $I_0 = \{j_1, \ldots, j_k\}$ und $e_{j_k} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^\top$. Dann ist $\varphi(D)$ eine kompakte orientierbare C^∞-Mannigfaltigkeit, dim k

$$\implies \omega(\varphi(D)) \overset{6.7}{=} \int_D \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I(\varphi(y)) \det\left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial y}\right) \mathrm{d}y$$

Sei $I \in \mathcal{G}^{(k)}$, $I \neq I_0$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$

$$\implies \det\left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial y}\right) = \det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial y}\right)$$

$$\varphi(y) = x_0 + \delta(y_1 e_{j_1} + y_2 e_{j_2} + \ldots + y_k e_{j_k})$$

$$\implies \frac{\partial \varphi}{\partial y_\ell} = \delta e_{j_\ell}, \quad \text{insbesondere } \frac{\partial \varphi}{\partial y_\ell} = \begin{cases} \delta & i = j_\ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies \det \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \varphi_{i_1} & \ldots & \partial_{y_k} \varphi_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} \varphi_{i_k} & \ldots & \partial_{y_k} \varphi_{i_k} \end{pmatrix} = 0$$

Außerdem

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_{I_0}}{\partial y}\right) = \det \begin{pmatrix} \delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \delta \end{pmatrix} = \delta^n$$

$$\implies \omega(\varphi(D)) = 0 + \ldots + 0 + \int_D a_{I_0}(\varphi(y)) \cdot \delta^n \,\mathrm{d}y \geq \frac{1}{2} a_{I_0}(x_0) \delta^n \int_D 1 \,\mathrm{d}y > 0$$

$\lightning$ $\omega(S) = 0$ für alle S.

2.) Die Eindeutigkeit folgt aus 1.). Existenz: Forme alle Summanden $\mathrm{d}x_{i_1}, \ldots, \mathrm{d}x_{i_k} = (-1)\mathrm{d}x_I$, $I \in \mathcal{G}^{(k)}$ um und fasse gleiche $\mathrm{d}x_I$ zusammen. ■

2.8 Rechnen mit Differentialformen

8.1 **Multiplikation** **1.)** *Sind $k, l \geq 1$ und $k + l \leq n$ und*

$$\omega_1 = \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I \mathrm{d}x_I, \qquad \omega_2 = \sum_{J \in \mathcal{G}^{(l)}} b_J \mathrm{d}x_J$$

so ist

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \coloneqq \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} \sum_{J \in \mathcal{G}^{(l)}} (a_I b_J) \qquad \underbrace{\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J}_{\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_l}}$$

eine $k + l$-Form, das Produkt von ω_1 und ω_2.

2.) *Im Fall $k = 0$, $\omega_1 = f$ definieren wir*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \coloneqq \sum_{J \in \mathcal{G}^{(l)}} (f \cdot b_J) \mathrm{d}x_J$$ ⋊

8.2 **Satz** *Es gelten Distributiv- und Assoziativgesetz:*

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$$
$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$$
$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$$ ⋊

8.3 **Differentiation** **1.)** *Falls $\omega = f$ eine 0-Form der Klasse C^1 in $O y$ ist, dann heißt die 1-Form*

$$\mathrm{d}\omega \coloneqq \mathrm{d}f \coloneqq \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f) \mathrm{d}x_i$$

heißt Ableitung von ω.

2.) *Falls $k \geq 1$ und $\omega = \sum_{j \in \mathcal{G}^{(k)}} a_J \mathrm{d}x_J$ eine k-Form der Klasse C^1 ist, heißt die $(k+1)$-Form*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &\eqqcolon \sum_{J \in \mathcal{G}^{(k)}} \mathrm{d}a_J \wedge \mathrm{d}x_J \\ &= \sum_{J \in \mathcal{G}^{(k)}} \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} a_J) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_J \end{aligned}$$

heißt Ableitung von ω.

Insbesondere ist also für eine k-Form ω der Klasse C^m die Ableitung $\mathrm{d}\omega$ eine $(k+1)$-Form der Klasse C^{m-1}. ⋊

8.4 **Beispiel** **1.)** Sei $O \coloneqq \mathbb{R}^n$, $\omega \coloneqq f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$, dann ist

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)\mathrm{d}x_i$$

Sei $S = \phi([a,b])$ eine 1-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit (vergleiche 6.7), dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(S) &= \int_{y\in[a,b]} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)(\phi(y)) \underbrace{\det(\tfrac{\partial \phi_i}{\partial y})}_{=\frac{\partial \phi_i}{\partial y}} \right)}_{=\frac{\mathrm{d}(f\circ\phi)}{y}} \mathrm{d}y \\ &= f(\phi(b)) - f(\phi(a))\end{aligned}$$

und für den Rand, also der 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\tilde{S} = \{\phi(a), \phi(b)\}$

$$\omega(\tilde{S}) = f(\phi(a)) + f(\phi(b))$$

2.) Sei $O \coloneqq \mathbb{R}^3, V \in C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ und

$$\begin{aligned}\omega &= V_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= V_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - V_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 - V_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

Aus 7.5 wissen wir

$$\omega(S) = \int_S \langle V, n_0 \rangle \,\mathrm{d}V^{(2)}$$

also

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}V_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \mathrm{V}_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}V_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= (\partial_{x_1} V_1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - (\partial_{x_2} V_2)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + (\partial_{x_3} V_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= \underbrace{(\partial_{x_1} V_1 + \partial_{x_2} V_2 + \partial_{x_3} V_3)}_{=\mathrm{div}V} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

Für eine 3-dimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit $S = \phi(\overline{K_1^{(3)}(0)})$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(S) &= \int_S \mathrm{d}\omega = \int_{K_1^{(3)}(0)} \mathrm{div}V(\phi(y)) \det(\tfrac{\partial \phi}{\partial y})\mathrm{d}y \\ &= \pm \int_{S=\phi(\overline{K_1^{(3)}(0)})} \mathrm{div}V(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

8.5 **Satz** **1.)**

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) &= \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2 \\ \mathrm{d}(c\omega) &= c\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

2.) *Sei ω_1 eine k-Form und ω_2 eine l-Form, jeweils der Klasse C^1. Dann gilt die Produktregel:*

$$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \omega_2$$

3.) *Ist ω von der Klasse C^2, so gilt die Poincare-Identität:*

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$$

Beweis **1.)** Nachrechnen

2.) Sei $\omega_1 = a(x)\mathrm{d}x_I$, $\omega_2 = b(x)\mathrm{d}x_J$, also $\omega_1 \wedge \omega_2 = (a(x)b(x))\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J$, mit $I \in \mathcal{G}^{(k)}$ und $J \in \mathcal{G}^{(l)}$.

3.) Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(a(x)b(x)) \wedge dx_J \wedge dx_J \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i}(a \cdot b) dx_i \wedge dx_J \wedge d_J \\
&= b \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} a) dx_i \wedge dx_J \wedge dx_J + a \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} b) \underbrace{dx_i \wedge dx_J}_{=(-1)^k dx_J \wedge dx_i} \wedge dx_J \\
&\overset{\text{Def./1-Produkt}}{=} (\sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} b) dx_i \wedge dx_J) \wedge b dx_J + (-1)^k a dx_J \wedge (\sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} b) dx_i \wedge dx \\
&= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2
\end{aligned}$$

4.) **a.)** Fall: $\omega = f \in C^2(O \to \mathbb{R})$ ist O-Form. Dann folgt $d\omega = \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} f) dx_i$

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} f) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\delta_{x_j}(\delta_{x_j} f)}_{=\delta_{x_i}(\delta_{x_j} f)} dx_j \wedge dx_i = 0
\end{aligned}$$

Hierbei kommt jeder Summand ein Mal mit plus und ein Mal mit minus vor. Beachte, dass

$$dx_j \wedge dx_i = \begin{cases} 0 & \text{, falls } i = j \\ -dx_i \wedge dx_j & \text{, falls } i \neq j \end{cases}$$

b.) Fall: O.B.d.A. $\omega = a_J dx_J, J \in G^{(k)} \implies \omega = a_j \wedge dx_J$ dann folgt mit der Produktregel

$$d\omega = da_J \wedge dx_J + (-1)^0 a_J \underbrace{d(dx_J)}_{=0}$$

dies gilt offensichtlich nach Definition, denn

$$d(dx_J) = d(1 \cdot dx_J) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} 1) dx_i \wedge dx_J$$

Nochmaliges Anwenden der Produktregel unter Betrachtung von Fall a) und Vorherigem führt zu:

$$d^2\omega = \underbrace{d^2 a_J}_{=0\text{Fall a)}} \wedge dx_J + (-1)^1 da_J \wedge \underbrace{d^2 x_J} = 0\text{vorh.} = 0 \qquad \blacksquare$$

8.6 **Definition** *Sei S k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ($k \geq 2$) mit Rand und orientiertem Atlas $A(S) = \{(\phi_1, U_1), \dots, (\phi_N, U_N)\}$. Im Unterschied zu 4.4 sollen als Definitionsbereiche für die ϕ_j zugelassen sein: $K_1^(k)(0)$ oder $K_1^{(k)-}(0) := \{y \in K_1^{(k)}(0) : y_1 \leq 0\}$. Sei $A(S)$ so sortiert, dass $\phi_1, \dots, \phi_L$ auf $K_1^{(k)-}(0)$ definiert sind und $\phi_{L+1}, \dots, \phi_N$ auf $K_1^{(k)}(0)$. Dann ist*

$$A(\delta S) := \{(\tilde{\phi}_1, \tilde{U}_1), \dots, (\tilde{\phi}_L, \tilde{U}_L)\}$$

mit $\tilde{\phi}_j(y_1, \dots, y_{n-1}) := \phi_j(0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1})$ und $\tilde{U}_j := U_j \cap \delta S = \tilde{\phi}_j(K_1^{(k-1)}(0))$ ein orientierter Atlas von δS. Die so definierte Orientierung heißt verträglich zur Orientierung von S. Ist $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ Zerlegung der Eins passnd zu $A(S)$, so $\{\psi_1, \dots, \psi_L\}$ Zerlegung der Eins zu $A(\delta S)$ und es gilt $\int_{\delta S} \omega = \sum_{j=1}^{L} \int_{\tilde{U}_j} \psi_j \cdot \omega$ für jede $(k-1)$-Form ω. ⋊

8.7 **Satz von Stokes** *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, ω eine k-Form der Klasse C^1 in O, $S \subset O$ kompakte orientierte C^2-Mannigfaltigkeit der Dimension $k+1$. Dann gilt:*

$$\int_{\delta S} \omega = \int_S d\omega$$

falls S, δS verträglich orientiert wird. ⋊

Beweis **1.)** Es gelte o.B.d.A

$$\omega = a(x) dx_J \qquad J \in \mathcal{G}^{(k)}$$

2.) Lokalisierung: Sei $A(S)$ orientierter Atlas, sortiert wie in 8.6.

$$\begin{aligned}
\int_S d\omega &= \sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \psi_j d\omega \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \partial_{x_i}(\psi_j a) dx_i \wedge dx_J \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} (\partial_{x_i}\psi_j) axx_i \wedge dx_J}_{\int_S (\underbrace{\sum_{j=1}^{N} \partial_{x_i}\psi_j)}_{\partial x_i \sum \psi_j = \partial x_i 1 = 0} \quad adx_i \wedge dx_J} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} d(\psi_j \omega)
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\int_{U_j} d(\psi_j\omega) = \begin{cases} \int_{\tilde{U}_j = U_j \cap \partial S} \psi_j \omega & 1 \leq j \leq L \\ 0 & L+1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Dann gilt, da $\{\psi_1, \ldots, \psi_L\}$ eine Zerlegung der Eins ist für ∂S mit Altas $\{(\tilde{\phi}_j, \tilde{U}_j), 1 \leq j \leq L\}$

$$\int_S d\omega = \sum_{j=1}^{L} \int_{\tilde{U}_j} \psi_j \omega = \int_{\partial S} \omega$$

3.) Sei $j = \{1, \ldots, N\}$ fest, $\phi_j = (g_1, \ldots, g_n)$, $D = K_1^{(k+1)}(0)$ falls $1 \leq j \leq L$, $D = K_1^{(k+1)}(0)$ sonst. Also

$$\int_{U_j} d(\psi_j \omega) = \sum_{i=1}^{n} \int_{y \in D} \partial_{x_i}(\psi_j a)(\phi_j(y))) \det(\tfrac{\partial(g_i, g_J)}{\partial y}) dy$$

Entwickeln der Determinante nach der ersten Zeile ergibt

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{k+1} \int_{y \in D} \partial_{x_i}(\psi_j a)(\phi_j(y)) \tfrac{\partial g_i}{\partial y_l}(y) \cdot \det\Big(\frac{\partial(g_{i_1}, \ldots, g_{i_k})}{\underbrace{\partial(y_1, \ldots, y_{l-1}, y_{l+1}, \ldots}_{y^{(l)}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \int_{y \in D} \partial_{y_l}((\psi_j a) \circ \phi_j)(y) \det(\ldots) dy \\
&= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \int_{y^{(l)} \in K_1^{(k)}(0)} \int_{y_l = -\sqrt{1-|y^{(l)}|^2}}^{y_l = +\sqrt{1-|y^{(l)}|^2} \text{ oder } y_l = 0 \text{ falls } 1 \leq j \leq L} \ldots dy_l dy^{(l)}
\end{aligned}$$

Integriere jetzt partiell und beachte: $(\psi_j a) \circ \psi = 0$ für $y_l = \pm\sqrt{1 - |y^{(l)}|^2}$ da $\mathrm{supp}\psi_j \leq U_j$. Außerdem $\sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{l+1}\partial y_l(\det(\dots)) = 0$ (Nachrechnen).

$$= \begin{cases} 0 \\ \int_{\tilde{U}_j} \psi\omega \overset{\tilde{U}_j = \tilde{\phi}_j(K_1^{(k)}(0))}{=} (-1)^{i+1} \int_{y^{(i)} \in K_1^{(k)}(0)} (\psi_j a) \circ \phi_j(0, y^{(1)}) \det(\frac{\partial g_J}{\partial y^{(1)}}) dy \end{cases}$$

8.8 *Bemerkung:* **1.)** Im Fall $k = 0, \omega = a(x), S = \phi([\alpha, \beta]), \partial S = \{\phi(\alpha), \phi(\beta)\}$. Nach 8.4:

2.) Satz von Stokes gilt auch für $S = \_O$, d.h. $S \subset O$ nicht notwendig.

3.) Folgerungen

a.) Der Satz von Gauß-Ostrogradski: Sei $f \in C^1(O \to \mathbb{R}^n)$.

$$\int_S \nabla \cdot f dV^{(n)} = \int_{\partial S} \langle f, n_0 \rangle \, dV^{(n-1)}$$

Setze dazu $\omega := \sum_{j=1}^n (f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n)$

b.) Klassischer Satz von Stokes: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 und $f \in C^1(S \to \mathbb{R}^3)$, dann gilt

$$\int_S (\nabla \times f) dV^{(2)} = \int_{\partial S} \langle f, t_0 \rangle \, dV^{(1)}$$

Setze dazu $\omega := f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. ⊸

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Funktionalanalysis

1.1 **Definition** *Sei $(B,+,\cdot)$ ein linearer Raum (d.h. ein Vektorraum) und $\|\cdot\| : B \to \mathbb{R}$ eine Norm (d.h. $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \iff u = 0$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ und $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$).*

Ist B vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B$ konvergiert gegen einen Grenzwert in B, so nennt man B mit der Norm $\|\cdot\|$ Banachraum. ⋊

1.2 ▶| *Beispiel* **1.)** Die komplexen Zahlen mit der p-Norm

$$B := \mathbb{C}^n, \qquad \|u\| := (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$

2.) Sei $B = C([a,b] \to \mathbb{C})$ mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

z.B. $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$, dann ist B kein Banach-Raum (Der Raum ist zwar normiert, aber nicht vollständig; ohne Beispiel).

3.) Definiere

$$L^p(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{C} : f \text{ messbar} \wedge \int_I |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann bildet $L^p(I)$ mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Identifiziere $f, \tilde{f}$, falls $\int_I |f - \tilde{f}| d\mu = 0$) einen Banachraum. |◀

1.3 **Satz: Banachscher Fixpunktsatz** *Sei B ein Banachraum, $\emptyset \neq D \subset B$ mit D abgeschlossen und $F : D \to B$ eine* Kontraktion, *d.h.*

$$\exists q \in [0,1[\ \forall x,y \in D : \|F(x) - F(y)\| \leq q\|x - y\|$$

mit $F(D) \subset D$. Dann gilt

1.) *Es existiert $x \in D$ mit $F(x) = x$, d.h. die Abbildung F hat genau einen* Fixpunkt *$x \in D$.*

2.) *Ist $x_0 \in D$ und $x_n := F(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$x_n \to x \qquad n \to \infty$$

mit der Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x\| \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$$

Beweis **1.)** Eindeutigkeit: Seien x, y zwei Fixpunkte, dann ist

$$\|x - y\| = \|F(x) - F(y)\| \le q\|x - y\|$$

wegen $q < 1$ folgt $\|x - y\| = 0$, also $x = y$.

2.) Wegen $F(D) \subset D$ ist x_n für $n \in \mathbb{N}_0$ wohldefiniert.

Zeige zunächst

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le q^n\|x_1 - x_0\|$$

induktiv.

Für den Rest (1.4) siehe Numerik (wurde dort schöner bewiesen). ■

1.4 *Bemerkung:* Es lässt sich ebenfalls zeigen:

$$\|x_n - x\| \le \frac{1}{1-q}\|x_{n+1} - x_n\|$$ ⊸

3.2 Beispiele

3.2.1 Tee

Beschreibe $y(t)$ die Temperatur des Tee's und y_A = const. die Außentemperatur. Es gilt folgende Differentialgleichung

$$y'(t) = -K(y(t) - y_A)$$

Die Lösung lautet

$$y(t) = y_A + ce^{-Kt} \qquad t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Probe:

$$y' = c(-K)e^{-Kt} = -K(ce^{-Kt}) = -K(y(t) - y_A)$$

Die Lösung ist erst eindeutig, wenn z.B. $y(t_0) = y_0$ vorgegeben wird (*Anfangsbedingung*).

2.1 **Definition: nicht-formale Beschreibung** *Eine* Differentialgleichung *ist eine Glichung für eine gesuchte Funktion y, in der auch die Ableitung(en) von y auftreten. Sie heißt* gewöhnlich, *falls keine partiellen Ableitungen auftreten, sonst* partiell ⋊

3.2.2 Separierbare Differentialgleichungen

Seien $I_f, I_g \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f \in C(I_f \to \mathbb{R}), g \in C(I_g \to \mathbb{R})$. Gesucht ist ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $y \in C^1(I \to \mathbb{R})$, sodass

$$y' = f(x)g(y)$$

Die Variablen sind also separierbar.

a.) Falls $g(y)$ in y_0 eine Nullstelle hat, dann existiert die konstante Lösung:

$$y(x) = y_0$$

Alle Nullstellen von $g(y)$ repräsentieren also konstante Lösungen.

b.) Sei $y \in C^1(I \to \mathbb{R})$ eine Lösung mit $g(y(x)) \neq 0$ für $x \in I$. Forme $y'(x) = f(x)g(y(x))$ um und betrachte die Stammfunktionen:

$$\begin{aligned} && \frac{y'(x)}{g(y(x))} &= f(x) \\ \iff && G(y(x)) + c_1 := \int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx &= \int f(x) dx =: F(x) + c_2 \qquad F' = \\ \iff && G(y(x)) &= F(x) + c \end{aligned}$$

da $G' = \frac{1}{g} \neq 0$ ist G injektiv und lokal umkehrbar.

$$\iff \qquad y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

Merkregel

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Alle y nach links, x nach rechts und Integral davor:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

2.2 ▶| *Beispiel* Sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y' = \cos^2 y \cos x$$

a.) Die konstante Lösung ergibt sich für $\cos^2 y = 0$, also sind alle Funktionen der Form

$$y(x) = (n + \tfrac{1}{2})\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

konstante Lösungen.

b.) Für $y \neq (n + \frac{1}{2})\pi$ ergibt sich nach der Merkregel

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\cos^2 y} &= \int \cos x dx \\ \iff \tan y &= \sin x + c \\ \iff y &= \arctan(\sin x + c) + n\pi \end{aligned}$$

Die Lösungen sind demnach alle Funktionen der Form

$$y(x) = \arctan(\sin x + c) + n\pi \qquad c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Beobachtungen

- Durch jeden Punkt (x_0, y_0) geht genau eine Lösung:

$$y(x) = \arctan(\sin x + \underbrace{\tan y_0 - \sin x_0}_{=c})$$

falls $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$.

- Jede Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert: *globale* Lösung.
- Für festes $x_1 \in \mathbb{R}$ hängt $y(x_1)$ stetig von (x_0, y_0) ab.
- Die Lösungsvielfalt ist durch die Parameter c und n beschrieben.
- Die Lösung ist eindeutig durch die *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0$$

vorgegeben (für gegebenes x_0, y_0).

2.3 ▶| *Beispiel* Sei folgende DGL gegeben

$$y' = (y^2)^{\frac{1}{3}}$$

a.) Die konstante Lösung ergibt sich als

$$y(x) = 0$$

b.) Für $y > 0$ oder $y < 0$ ergibt sich nach der Merkregel

$$3y^{\frac{1}{3}} = \int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dx = x + c$$

für $x > -c$ im Fall $y > 0$, und für $x < -c$ im Fall $y < 0$. Es ergibt sich dann

$$y(x) = \frac{1}{27}(x + c)^3$$

Beobachtungen Für $y_0 \neq 0$ geht durch jeden Punkt genau eine Lösung: (jetzt exemplarisch für $y_0 > 0$):

$$y(x) = \frac{1}{27}(x+c)^3 \qquad c = 3y_0^{\frac{1}{3}} - x_0$$

Dies ist wegen der Bedingung $x > -c$ keine globale Lösung (*lokale Lösung*).

Setzt man diese Lösung fest zu einer globalen Lösung, geht die Eindeutigkeit verloren. Man kann beispielsweise den unteren Ast an einer beliebigen Stelle $r \leq 0$ ansetzen:

$$y_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}x^3 & x > 0 \\ 0 & r \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{27}(x-r)^3 & x < r \end{cases} \qquad \forall r \leq 0$$

Insbesondere gehen durch $(x_0, 0)$ beliebig viele Lösungen. ⊸

3.2.3 Systeme von Differentialgleichungen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Gesucht ist $y \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ mit

$$y' = Ay$$

ausgeschrieben ergeben sich

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots &= \qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

also n *gekoppelte* Differentialgleichungen.

Fall 1: $v_1, \ldots, v_n$ bildet eine Basis aus Eigenvektoren: $Av_j = \lambda_j v_j$ Dann ergibt sich die Lösung als

$$y(t) := \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

denn

$$y' = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j e^{\lambda_j t} v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} A v_j = Ay(t)$$

Die Eindeutigkeit ist durch Anfangsbedingungen gegeben:

$$y(t_0) = y_0 \qquad t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^n$$

damit gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{c_j e^{\lambda_j t_0}}_{=:d_j} v_j = y_0$$

Die d_j existieren und sind eindeutig, da $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis ist. Also existieren auch die

$$c_j = e^{-\lambda_j t_0} d_j$$

und sind eindeutig.

Beobachtungen ▸ Es existiert immer eine globale Lösung.

- Die Lösungsgesamtheit ist durch n skalierbare Gleichungen gegeben mit Parametern c_j.
- Die Eindeutigkeit ist stets durch die Anfangsbedingung gewährleistet.
- Für festes $t \in \mathbb{R}$ hängt $y(t)$ stetig von (t_0, y_0) ab.
- Der Lösungsraum ist ein reeller linearer Raum mit Basis

$$\{t \to e^{\lambda_1 t v_1}, \dots, t \to e^{\lambda_n t} v_n\}$$

Fall 2: sonst Bilde die Jordan-Normalform:

$$J = T^{-1} A T$$

beispielsweise

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Setze $u(t) := T^{-1} y(t)$ für eine Lösung $y(t)$. Dann ist

$$u'(t) = T^{-1} y'(t) = T^{-1} A y(t) = T^{-1} A T u(t)$$

Also

$$y' = Ay \qquad \Longleftrightarrow \qquad u' = Ju$$

Wir können also statt $y' = Ay$ das System $u' = Ju$ berechnen und anschließend zurücktransformieren. In unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} u_1' &= \lambda_1 u_1 + u_2 \\ u_2' &= \qquad\; + \lambda_1 u_2 + u_3 \\ u_3' &= \qquad\qquad\quad + \lambda_1 u_3 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind gegeben durch (gehe Blockweise von unten nach oben vor und nutze die umgekehrte Produktregel):

$$\begin{aligned} u_3 &= c_3 e^{\lambda_1 t} \\ u_2 &= c_2 e^{\lambda_1 t} + c_3 t e^{\lambda_1 t} \\ u_1 &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt dann

$$y(t) := Tu(t)$$

3.2.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}$ gegeben, gesucht ist $y \in C^n(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ mit

$$y^n = a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

Setze dazu

$$u_1 := y \qquad u_2 := y' \qquad \ldots \qquad u_n := y^{(n-1)}$$

Es ergibt sich im Beispiel für die DGL

$$y''' = y'$$

$$\begin{aligned} u_1' &= && u_2 \\ u_2' &= && u_3 \\ u_3' &= y''' = y' = && u_2 \end{aligned}$$

Löse dieses System und setze dann

$$y(t) := u_1(t)$$

Die Eindeutigkeit ist durch die Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_1, \qquad y''(t_0) = y_2$$

gegeben.

3.3 Existenz und Eindeutigkeit

3.1 **Definition** *Sei B ein Banachraum.*

1.) *Sei $f : \mathbb{R} \supset D \to B$ mit Häufungspunkt x in D. f heißt* differenzierbar *in x, falls*

$$\exists f'(x) \in B : \left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right\| \to 0 \qquad k \to 0, x + k \in D$$

2.) *Für $-\infty < a < b < \infty$ heißt*

$$Z([a,b]) = \Big((x_0, \ldots, x_{N(Z)}, (\xi_1, \ldots, \xi_{N(Z)})\Big)$$

mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N(Z)} = b$ und $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ eine Zerlegung *von $[a,b]$. Weiter heißt*

$$S_Z(f) := \sum_{j=1}^{N(Z)} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Riemann-Summe. *Definiere die* Feinheit *von Z als*

$$\delta(Z) := \max_{1 \le j \le N(Z)} (x_j - x_{j-1})$$

$f : [a,b] \to B$ heißt Riemann-integrierbar, *falls*

$$\exists I \in B : \|S_z(f) - I\| \to 0 \qquad \delta(Z) \to 0$$

schreibe

$$I := \int_a^b f(x) dx$$ ⋊

3.2 **Korollar: Folgerung** *Für $a < c < b$ gilt*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b dx$$ ⋊

3.3 **Satz** *Wenn $f : [a,b] \to B$ stetig ist, dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis Zeige: falls $\delta(Z), \delta(Z') < \delta$, dann ist $\|S_Z(f) - S_{Z'}(f)\| < \varepsilon$. Für jede Folge Z_n von Zerlegungen mit $\delta(Z_n) \to 0$ ($n \to \infty$) gilt dann.

1.) $(S_{Z_n}(f))$ ist Cauchy-Folge in B, also konvergent.

2.) $I := \lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f)$ ist unabhängig von der Folge (Z_n).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und Z, Z' zwei Zerlegungen. Definiere

$$Z'' = \Big((x_0'', \dots, x_{N(Z)}''), (\xi_1'', \dots, \xi_{N(Z)}'')\Big)$$

durch

$$\{x_0'', \dots, x_{N(Z'')}''\} := \{x_0, \dots, x_{N(Z)}\} \cup \{x_0', \dots, x_{N(Z)}'\} \qquad \xi_j'' \in [x_{j-1}'', x_j''] \text{ beliebig}$$

Benutze

$$\|S_Z(f) - S_{Z'}(f)\| \leq \|S_Z(f) - S_{Z''}(f)\| + \|S_{Z''}(f) - S_{Z'}(f)\|$$

$$\begin{aligned}\|S_Z(f) - S_{Z''}(f)\| &= \left\|\sum_{j=1}^{N(Z)} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{N(Z'')} f(\xi_j'')(x_j'' - x_{j-1}'')\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{N(Z'')} f(\xi_{J(j)}(x_j'' - x_{j-1}'') - \sum_{j=1}^{N(Z'')} f(\xi_j'')(x_j'' - x_{j-1}'')\right\|\end{aligned}$$

Dabei ist $J(j)$ so definiert, dass $[x_{j-1}'', x_j''] \subset [x_{J(j)-1}, x_{J(j)}]$, d.h.

$$J(j) := \min\left\{k \in \mathbb{N} : x_j'' \leq x_k\right\}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N(Z'')} \|f(\xi_{J(j)}) - f(\underbrace{\xi_j''}_{\in[x_{J(j)-1}, x_{J(j)}]})\|(x_j'' - x_{j-1}'')$$

Da $|\xi_{J(j)} - \xi_j''| \leq \delta(Z)$ und f gleichmäßig stetig (f stetig und $[a,b]$ kompakt), ist

$$\|f(\xi_{J(j)}) - f(\xi_j'')\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{für } \delta(Z) < \delta$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{N(Z'')} (x_j'' - x_{j-1}'')}_{=b-a} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Verfahre analog für den anderen Teil, dann ergibt sich

$$\|S_Z(f) - S_{Z'}(f)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \delta(Z), \delta(Z') < \delta$$

■

3.4 **Satz** *Wenn $f : [a,b] \to B$ stetig ist, dann gilt*

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx$$

BEWEIS Schreibe

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| &= \lim_{\delta(Z)\to 0} \|S_Z(f)\| \\
&= \lim_{\delta(Z)\to 0} \left\| \sum_{j=1}^{N(Z)} f(\xi_j)(x_j x_{j-1}) \right\| \\
&= \limsup_{\delta(Z)\to 0} \underbrace{\sum_{j=1}^{N(Z)} \|f(\xi_j)\|(x_j - x_{j-1}}_{=S_Z(\|f\|)\to\int_a^b \|f(x)\|dx} \\
&= \int_a^b \|f(x)\|dx
\end{aligned}
$$

■

3.5 **Satz: Hauptsatz** *Sei $f : [a,b] \to B$ stetig und $F(x) := \int_a^b f(\xi)d\xi$ $(a \le x \le b)$. Dann ist F differenzierbar und*

$$F'(x) = f(x) \qquad a \le x \le b$$

BEWEIS Für $h > 0$ betrachte

$$
\begin{aligned}
\left\| \underbrace{\tfrac{1}{h}(F(x+h) - F(x))}_{=\int_x^{x+h} f(\xi)d\xi \text{ (Additivität Integral)}} - \overbrace{f(x)}^{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)d\xi} \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(\xi) - f(x))d\xi \right\| \\
&\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{\|f(\xi) - f(x)\|}_{<\varepsilon \text{ für } |\xi - x| \le h < \delta \text{ da } f \text{ stetig in } x} d\xi \\
&\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon d\xi = \varepsilon
\end{aligned}
$$

für $h < \delta$. ■

3.6 **Korollar: Folgerung** *Falls $G \in C^1([a,b] \to B)$ und $G' = f$ (G* Stammfunktion *von f), dann ist*

$$(G - F)' = 0$$

Also (ohne Beweis) $G = F + c$ mit $c \in B$. Damit ist das Integral

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\
&= G(b) - c - (G(a) - c) \\
&= G(b) - G(a)
\end{aligned}
$$

unabhängig von der Wahl der Stammfunktion. ⋊

3.7 **Satz: Picard-Lindelöf** *Sei* $(B, \|\cdot\|)$ *ein Banachraum,* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times B$, $I = [x_0 - r, x_0 + r] \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $D := \{y \in B : \|y - y_0\| \leq R\}$ *für ein* $R \in \mathbb{R}$. *Sei* $f \in C(I \times D \to B)$ *mit*

$$\exists L > 0 \ \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in I \times D : \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

d.h. f *erfüllt eine* Lipschitz-Bedingung *bezüglich zwei Variablen. Weiter seien*

$$M := \sup_{I \times D} \|f(x,y)\| < \infty \qquad \delta := \min\left\{\frac{1}{2L}, \frac{R}{M}, r\right\}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung y *von*

$$y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to B) \tag{3.1}$$
$$\wedge \quad y'(x) = f(x, y(x)) \qquad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \tag{3.2}$$
$$\wedge \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.3}$$

.

BEWEIS **1.)** Formuliere eine äquivalente Integralgleichung. y ist genau dann eine Lösung von (3.1), wenn

$$y \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to B) \qquad \wedge \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \tag{3.4}$$

mit $\int_{x_0}^{x} \ldots = \int_{x}^{x_0} \ldots$ falls $x < x_0$.

BEWEIS (3.1) $\implies$ (3.4)

Integriere die Differentialgleichung in (3.1):

$$\int_{x_0}^{x} y'(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(x))d\xi y(x) - \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} \qquad = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(x))d\xi$$

(3.4) $\implies$ (3.1)

$f(\xi, y(\xi))$ ist stetig in ξ. Nach dem Hauptsatz ist $y' = 0 + f(x, y(x))$ mit y' stetig. Für $x = x_0$ in der Integralgleichung: $y(x_0) = y_0 + 0$. ■

2.) Zeige, dass (3.4) eine eindeutige Lösung besitzt.

BEWEIS Sei $(\tilde{B}, \|\cdot\|^{\sim}) := (C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to B), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum und

$$\tilde{D} := C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to D)$$

(abgeschlossene Teilmenge in $\tilde{B}$) Definiere $T : \tilde{D} \to \tilde{B} : y \to F(y)$ durch

$$F(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

a.) $F(y)$ ist stetig und

$$\|F(y(x)) - y_0\| \overset{3.4}{\leq} \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(\xi, y(\xi))\|}_{\leq M} d\xi \right| \leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \delta \overset{\text{def } \delta}{\leq} R$$

Also $F(\tilde{D}) \leq \tilde{D}$.

b.) Außerdem ist $\tilde{D} \neq \emptyset$, denn $\phi \in \tilde{D}$ für $\phi(x) := y_0$.

c.) F ist eine Kontraktion.

$$\begin{aligned}
\|F(y) - F(\tilde{y})\|_\infty &= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left\| \int_{x_0}^{x} \Big(f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, \tilde{y}(\xi)) \Big) d\xi \right\| \\
&= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{\Big\| f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, \tilde{y}(\xi)) \Big\|}_{\leq L \|y(\xi) - \tilde{y}(\xi)\| \leq L \|y - \tilde{y}\|_\infty} d\xi \right| \\
&\leq L \|y - \tilde{y}\|_\infty \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \delta} \\
&\overset{L\delta \leq \frac{1}{2}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{2}}_{=q} \|y - \tilde{y}\|_\infty
\end{aligned}$$

Der Banachsche Fixpunktsatz besagt jetzt

$$\exists! y \in \tilde{B} : F(y) = y$$

also $y \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to B)$ und aus $F(y) = y$ ergibt sich

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi = y(x) \qquad \blacksquare$$

Die Äquivalenz zur ursprünglichen DGL liefert somit den Beweis dafür, dass die Lösung eindeutig ist. ■

3.4 Lineare Differentialgleichungen

4.1 **Definition** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I \to \mathbb{R}^{n^2})$, $g \in C(I \to \mathbb{R}^n)$. Die Differentialgleichung*

$$y' = \underbrace{A(x)y + g(x)}_{=R(y)}$$

für die Unbekannte $y \in C^1(I \to \mathbb{R})$ heißt lineares System 1. Ordnung. *Für $g = 0$ nennen wir es* homogen, *sonst* inhomogen. ⋊

4.2 *Bemerkung:* Anwendung von Picard-Lindelöf auf obige Differentialgleichung mit $y(x_0) = y_0$ (für vorgegebenes $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$), $B := \mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{R}^n$ und Lipschitzbedingung

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq c\|y - \tilde{y}\|$$

für $x \in K \subset I$ mit K kompakt.

Der Satz liefert also eine lokale Lösung $\phi := y \in C^1([x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}^n)$. Erneute Anwendung mit Anfangsbedingung $y(x_0 + r) = \phi(x_0 + r)$ liefert die Lösung

$$\psi := y \in C^1([x_0 + r - \tilde{r}, x_0 + r + \tilde{r}] \to \mathbb{R}^n)$$

Zusammenkleben der Lösungen liefert

$$y(x) = \begin{cases} \phi(x) & x_0 - r \leq x \leq x_0 + r \\ \psi(x) & x_0 + r \leq x \leq x_0 + r + \tilde{r} \end{cases}$$

Dieses y ist stetig auf $[x_0 - r, x_0 + r + \tilde{r}]$. Weiter ist y' stetig auf dem selben Intervall, da

$$\begin{aligned} \phi'(x_0 + r) &= A(x_0 + r)\phi(x_0 + r) + g(x_0 + r) \\ &= A(x_0 + r)\psi(x_0 + r) + g(x_0 + r) \\ &= \psi'(x_0 + r) \end{aligned}$$

Als ist dieses $y \in C^1([x_0 - r, x_0 + r + r'] \to \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$y' = A(x)y + g(x) \qquad \wedge \qquad y(x_0) = y_0$$

Die Fortsetzung ist so lange möglich, bis $y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ (ohne Beweis). ⊸

4.3 **Satz** **1.)** *Homogener Fall ($g = 0$):*

a.) *Die Menge der Lösungen*

$$\mathcal{L}_{hom} = \{y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n : y' = A(x)y)$$

bildet einen Untervektorraum von $C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ der Dimension n. Für festes $x_0 \in I$ ist

$$P_{x_0} : \mathcal{L}_{hom} \to \mathbb{R}^n : y \mapsto P_{x_0}y := y(x_0)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus. Eine Basis von $\mathcal{L}_{hom}$ heißt Fundamentalsystem *(auch im Fall $g \neq 0$).*

b.) *Für n Lösungen $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{L}_{hom}$ sind äquivalent:*

i.) *$\{y_1, \ldots, y_n\}$ ist ein Fundamentalsystem*

ii.) $\forall x \in I : W(x) := \det(y_1(x) \ldots y_n(x)) \neq 0$ *(Wronski-Determinante)*

iii.) $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$.

2.) *Inhomogener Fall ($g \neq 0$):*

a.) *Die Menge der Lösungen $\mathcal{L}_{inhom}$ bildet einen affinen Unterraum von $C^1(I \to \mathbb{R}^n)$*

$$\mathcal{L}_{inhom} = \{y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n : y' = A(x)y + g(x))$$

*Ist $y_{part} \in \mathcal{L}_{inhom}$ eine beliebige, aber fest gewählt (*partikuläre Lösung*), so gilt*

$$\mathcal{L}_{inhom} = y_{part} + \mathcal{L}_{hom}$$

b.) *Nutze* Variaton der Konstanten*: Ist $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem, so ist*

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

genau dann Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$, wenn

$$c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n = g \qquad \iff \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}}_{\det(\dots)=W(x)\neq 0} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = g$$

$$\iff \qquad \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^{-1} g$$

BEWEIS **1.)** **a.)** Nach 4.1 ist $\mathcal{L}_{\text{hom}} \neq \emptyset$. Seien $y, \tilde{y}$ Lösungen von $y' = A(x)y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist für $u = \alpha y + \beta\tilde{y}$

$$u' = \alpha y' + \beta\tilde{y}' = \alpha A y' + \beta A\tilde{y}' = Au$$

und damit $u \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$. Damit ist $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ Untervektorraum. Die Abbildung P_{x_0} ist linear und wohldefiniert, da die Lösung der DGL eindeutig.

b.) P_{x_0} ist ein Vektorraum-Isomorphismus, da

$$\begin{aligned} \{y_1, \dots, y_n\} \text{ lin. unabhängig } &\iff \{P_{x_0}y_1, \dots, P_{x_0}y_n\} \text{ lin. unabhängig} \\ &\iff \det(y_1(x_0) \dots y_n(x_0)) = W(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

2.) **a.)** Zeige $y_{\text{part}} + \mathcal{L}_{\text{hom}} \subset \mathcal{L}_{\text{inhom}}$. Sei $y \in \mathcal{L}_{\text{hom}}, u := y + y_{\text{part}}$, dann ist

$$u' = y' + y_{\text{part}}' = Ay + Ay_{\text{part}} + g = Au + g$$

also $u \in \mathcal{L}_{\text{inhom}}$.

Zeige $\mathcal{L}_{\text{inhom}} \subset y_{\text{part}} + \mathcal{L}_{\text{hom}}$. Sei $u \in \mathcal{L}_{\text{inhom}}, y := u - y_{\text{part}}$, dann ist

$$y' = Au + g - (Ay_{\text{part}} + g) = Ay$$

also $y \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$ und damit $u = y_{\text{part}} + y \in y_{\text{part}} + \mathcal{L}_{\text{hom}}$.

b.) Setze $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$ in die DGL ein:

$$y' = \sum_{i=1}^{n}(c_j'y_j + c_jy_j') \overset{!}{=} A(x)\Big(\sum_{j=1}^{n} c_jy_j\Big) + g$$

$$\iff \qquad \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j + \sum_{j=1}^{n} c_jy_j' = \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{A(x)y_j}_{y_j'} + g$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} c_j'y_j' = g$$

■

4.4 **Definition** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \ldots, a_{n-1}, g \in C(I \to \mathbb{R})$. Dann heißt*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g$$

für die Unbekannte $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$ lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Für $g = 0$ nennen wir sie* homogen, *sonst* inhomogen.

4.5 *Bemerkung:* **1.)** Sei $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$ eine Lösung von obiger DGL, $u_1 := y, u_2 := y', \ldots, u_n := y^{(n-1)}$, dann ist

$$u' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ -a_{n-1}u_n - a_{n-2}u_{n-1} - \cdots - a_0u_1 + g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

2.) Ist umgekehrt $u \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ Lösung von obigem System und $y := u_1$, dann löst $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$ die ursprünglich lineare DGL n-ter Ordnung.

4.6 **Korollar: Folgerung** **1.)** *Im Fall $g = 0$:*

a.) *Die Menge der Lösungen*

$$\mathcal{L}_{hom} = \{y \in C^n(I \to \mathbb{R}) : \ldots\}$$

bildet einen linearen Unterraumvektor von $C^n(I \to \mathbb{R})$ der Dimension n. Die Abbildung

$$P_{x_0} : \mathcal{L}_{hom} \to \mathbb{R}^n : y \mapsto P_{x_0}(y) := \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_1) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Eine Basis von $\mathcal{L}_{hom}$ heißt Fundamentalsystem.

b.) *Für $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{L}_{hom}$ sind äquivalent*

i.) $\{y_1, \dots, y_n\}$ *ist Fundamentalsystem*

ii.)

$$\forall x \in I : W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

(Wronski-Determinante)

iii.) $\exists x_0 \in I : W(x) \neq 0$

2.) *Im inhomogenen Fall ($g \neq 0$):*

a.)

$$\mathcal{L}_{inhom} = y_{part} + \mathcal{L}_{hom}$$

wobei $y_{part} \in \mathcal{L}_{inhom}$ beliebig aber fest gewählt.

b.) *Variation der Konstanten: Ist $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem, so ist*

$$y(x) := c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

genau dann Lösung der DGL, falls

$$c_1' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + c_n' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^{-1}}_{\det(\dots)=W(x)\neq 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \qquad \rtimes$$

4.7 ▶| *Beispiel* Gegeben sei

$$xy'' + 2(x+1)y' + 2y = 1 - e^{-2x}$$

Forme in passende Form um:

$$y'' + 2(1 + \tfrac{1}{x})y' + \frac{2}{x}y = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

Die Lösung existiert auf $I = (0, \infty)$ oder auf $I' = (-\infty, 0)$

1.) Löse zunächst das homogene System. Der Ansatz $y = x^\alpha$ liefert ein Lösung

$$y_1(x) = \frac{1}{x}$$

für $x \in I$. Der Ansatz von d'Alembert:

$$y(x) = c(x)\frac{1}{x}$$

führt zu

$$y_2(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$$

auf I. Es ergibt sich

$$W(x) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{e^{-2x}}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{-2xe^{-2x}-e^{-2x}}{x^2} \end{pmatrix}}_{=:B} = -\frac{2e^{-2x}}{x^2} \neq 0 \qquad \text{(auf } I\text{)}$$

und

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \\ -\frac{e^{2x}}{2} & \frac{xe^{2x}}{2} \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-e^{-2x}}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}$$

berechne c_1, c_2:

$$c_1 = \frac{1}{2}(x + \tfrac{e^{-2x}}{2}) \qquad c_2 = \frac{1}{2}(x - \tfrac{e^{2x}}{2})$$

für $y_{\text{part}}(x)$ muss gelten

$$\begin{aligned} y_{\text{part}}(x) &= \frac{1}{2}(x + \tfrac{e^{-2x}}{2})\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x - \tfrac{e^{2x}}{2})\frac{e^{-2x}}{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4x} + \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4x} \end{aligned}$$

Wähle $y_{\text{part}} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$ und damit

$$y_{\text{inhom}} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{e^{-2x}}{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Index