

- orientierbar, 95
- Orientierung, 96
- meromorph, 56
- Normaleneinheitsvektor, 80
- nullhomotop, 15
- offen, 3
- Ordnung, 33
- Ordnung des Pols, 45
- Parameterdarstellung, 67
 - äquivalent, 68
- Poincaré-Identität, 112
- Polstelle, 45
- Potential, 76
- Produkt, 110
- projizierbar, 81
- Puiseux-Reihen, 41
- punktweise konvergent, 5
- Randpunkt, 92
- Residuum, 50
- Riemannsche Fläche, 33
- Rotation, 76
- Satz von Green, 87
- Skalarfeld, 76
- Stammfunktion, 12
- Standardabschätzung, 75
- Standardbereich, 81
- stetig, 4
- Tangenteneinheitsvektor, 68
- Tangentialebene, 79
- Tangententialraum, 94
- Umlaufszahl, 48
- Vektorfeld, 75
 - Divergenz, 75
 - Gradient, 76
 - Gradientenfeld, 76
 - Potential, 76
 - Rotation, 76
 - Skalarfeld, 76
- verträglich, 113
- Vielfachheit, 33
- wachsender Index, 108
- Weg, 10
- Wegintegral, 77
- wegzusammenhängend, 31
- wesentliche Singularität, 46
- Zerlegung der Eins, 99

Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky, Universität Stuttgart

Analysis 3

Vorlesungsmitschrift

Stuttgart, Wintersemester 2012 / 2013

Revision: 2. Januar 2014

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.¹

¹Henri Menke, phy86901@stud.uni-stuttgart.de

INDEX

- 0-dimensionale Mannigfaltigkeit, 91
- C^1 -homotop, 15
- k -Grundform, 108
- k -Inhalt, 103
- k -dimensionale Mannigfaltigkeit
 - mit Rand, 92
- k -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, 91
- abgeschlossen, 3
- Ableitung, 9, 110
- Ableitungsfunktion, 9
- Abschluss, 4
- absolut konvergent, 5
- Abstand, 99
- analytisch, 18
- analytisch fortsetzbar, 60
- analytische Fortsetzung, 60, 62
- Arbeit, 106
- Argument, 2
- Atlas, 91
 - kompatibel, 96
 - orientiert, 95
 - verträglich orientiert, 97
- berandet, 55
- Betrag, 2
- bewerteter Körper, 2
- Bogenlängendarstellung, 73
- Cauchy-Formel für Laurent-Koeffizienten, 44
- Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, 18
- Differentialform, 107
- differenzierbar, 9
- Divergenz, 75
- einfach zusammenhängend, 64
- Erweiterte Cauchy'sche Integralformel, 24
- Fläche im \mathbb{R}^3 , 79
- Flächeninhalt der Fläche F , 80
- Fluss, 106
- ganze Funktion, 25
- Gebiet, 31
- geschlossen, 10
- gleichmäßig konvergent, 5
- Gradient, 76
- Gradientenfeld, 76
- Greenscher Bereich, 87
- hebbare Singularität, 45
- holomorph, 18
- Innere, 4
- Integral, 80
- Integral von f , 10
- isolierte Singularität, 45
- Jordan-Kurve, 67
- Karte, 91
 - gleich orientiert, 95
 - Kompatibilität, 95
- Klasse m , 91
- komplexen Zahlen, 1
- konjugiert komplexe Zahl, 2
- konvergiert, 3
- Kreiskette, 60
- Kurve, 67
 - Bogenlänge, 69
 - glatt, 69
 - rektifizierbar, 69
 - stückweise glatt, 69
- Kurvenintegral von f über K , 74
- Länge, 13
- längs, 60
- Laurent-Entwicklung, 44
- Laurent-Reihe, 44
- Mannigfaltigkeit, 91
 - 0-dimensional, 91
 - kompakt, 104

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

INHALTSVERZEICHNIS

- 1 Funktionentheorie** 1
 - 1.1 Grundlagen 1
 - 1.2 Holomorphie und Analytizität 17
 - 1.3 Nullstellen 33
 - 1.4 Integrale längs geschlossener Kurven 43
 - 1.5 Analytische Fortsetzung 59
- 2 Vektoranalysis** 67
 - 2.1 Kurvenintegrale 67
 - 2.2 Flächenintegrale im \mathbb{R}^3 79
 - 2.3 Volumenintegrale und Integralsätze 81
 - 2.4 Mannigfaltigkeiten 91
 - 2.5 Zerlegung der Eins 99
 - 2.6 Integration auf Mannigfaltigkeiten 103
 - 2.7 Differentialformen 106
 - 2.8 Rechnen mit Differentialformen 110
- 3 Gewöhnliche Differentialgleichungen** 117
 - 3.1 Funktionalanalysis 117
 - 3.2 Beispiele 118
 - 3.3 Existenz und Eindeutigkeit 124
 - 3.4 Lineare Differentialgleichungen 128

Index 135

1.) Löse zunächst das homogene System. Der Ansatz $y = x^\alpha$ liefert ein Lösung

$$y_1(x) = \frac{1}{x}$$

für $x \in I$. Der Ansatz von d'Alembert:

$$y(x) = c(x) \frac{1}{x}$$

führt zu

$$y_2(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$$

auf I . Es ergibt sich

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{e^{-2x}}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{-2xe^{-2x} - e^{-2x}}{x^2} \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{2e^{-2x}}{x^2}}_{=:B} \neq 0 \quad (\text{auf } I)$$

und

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \\ -\frac{e^{2x}}{2} & \frac{x e^{2x}}{2} \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-e^{-2x}}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}$$

berechne c_1, c_2 :

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(x + \frac{e^{-2x}}{2} \right) \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(x - \frac{e^{2x}}{2} \right)$$

für $y_{\text{part}}(x)$ muss gelten

$$\begin{aligned} y_{\text{part}}(x) &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{e^{-2x}}{2} \right) \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{e^{2x}}{2} \right) \frac{e^{-2x}}{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4x} + \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4x} \end{aligned}$$

Wähle $y_{\text{part}} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$ und damit

$$y_{\text{inhom}} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{e^{-2x}}{x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Eine Basis von \mathcal{L}_{hom} heißt Fundamentalsystem.

b.) Für $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$ sind äquivalent

- i.) $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n\}$ ist Fundamentalsystem
- ii.)

$$\forall x \in I : W(x) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1(x) & \dots & \mathcal{Y}_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n-1)}(x) & \dots & \mathcal{Y}_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

(Wronski-Determinante)

iii.) $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$

2.) Im inhomogenen Fall ($g \neq 0$):

a.)

$$\mathcal{L}_{\text{inhom}} = \mathcal{Y}_{\text{part}} + \mathcal{L}_{\text{hom}}$$

wobei $\mathcal{Y}_{\text{part}} \in \mathcal{L}_{\text{inhom}}$ beliebig aber fest gewählt.

b.) Variation der Konstanter: Ist $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n\}$ ein Fundamentalsystem, so ist

$$\mathcal{Y}(x) := c_1(x)\mathcal{Y}_1(x) + \dots + c_n(x)\mathcal{Y}_n(x)$$

genau dann Lösung der DGL, falls

$$c_1' \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_1' \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_1' \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \dots + c_n' \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_1' \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1(x) & \dots & \mathcal{Y}_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n-1)}(x) & \dots & \mathcal{Y}_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1}}_{\det(\dots) = W(x) \neq 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$$

4.7 ▶ Beispiel Gegeben sei

$$xy'' + 2(x+1)y' + 2y = 1 - e^{-2x}$$

Forme in passende Form um:

$$y'' + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)y' + \frac{2}{x}y = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

Die Lösung existiert auf $I = (0, \infty)$ oder auf $I' = (-\infty, 0)$

I

FUNKTIONENTHEORIE

1.1 Grundlagen

1.1 Definition Die komplexen Zahlen werden definiert durch

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

1.2 Bemerkung: 1.) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$.

2.) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus, insbesondere gilt

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$

$$\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2).$$

Identifiziere \mathbb{R} mit $\varphi(\mathbb{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Schreibe $(x, 0) =: x \in \mathbb{R}$

3.) Imaginäre Einheit $i := (0, 1)$

$$\begin{aligned} i^2 &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \\ \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y \cdot i = x + iy \end{cases} \end{aligned}$$

Rechnen in \mathbb{C}

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + (i)^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + iy} &= \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 - (iy)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - iy) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

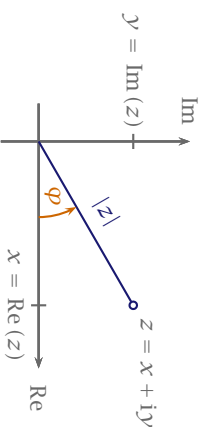
Der Realteil einer komplexen Zahl ist definiert als

$$\operatorname{Re}(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy) = x,$$

der Imaginärteil ist definiert als

$$\operatorname{Im}(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy) = y.$$

Gaußsche Zahlenebene



1.3 **Definition** 1.) $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$ heißt **konjugiert komplexe Zahl** zu z .

2.) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ heißt **Betrag** von z .

3.) **Polarardarstellung:** Sei $z = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, wobei $\varphi = \arg(z)$ (**Argument** von z) eindeutig gegeben ist durch

$$-\pi \leq \varphi < \pi, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Rechnen mit Polarardarstellung:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Die Lösung von $z^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ist gegeben durch

$$|z| = r^{1/n},$$

$$\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1.4 **Satz** $(\mathbb{C}, +, \cdot, | \cdot |)$ ist ein **bewerteter Körper**, das heißt für $| \cdot | : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ gelten:

1.) $|z| \geq 0 \wedge (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

2.) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3.) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δ -Ungleichung)

Außerdem gilt die » Δ -Ungleichung nach unten«:

$$|z_1 \pm z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$$

b.) Setze $\gamma(x) = c_1(x)\gamma_1(x) + \dots + c_n(x)\gamma_n(x)$ in die DGL ein:

$$\gamma' = \sum_{j=1}^n (c_j' \gamma_j + c_j \gamma_j') \stackrel{!}{=} A(x) \left(\sum_{j=1}^n c_j \gamma_j \right) + g$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j' \gamma_j + \sum_{j=1}^n c_j \gamma_j' = \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{A(x) \gamma_j}_{\gamma_j'} + g$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j' \gamma_j' = g$$

■

4.4 **Definition** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \dots, a_{n-1}, g \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$. Dann heißt

$$\gamma^{(n)} + a_{n-1} \gamma^{(n-1)} + \dots + a_1 \gamma' + a_0 \gamma = g$$

für die Unbekannte $\gamma \in C^n(I \rightarrow \mathbb{R})$ lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung. Für $g = 0$ nennen wir sie homogen, sonst inhomogen.

×

4.5 **Bemerkung:** 1.) Sei $\gamma \in C^n(I \rightarrow \mathbb{R})$ eine Lösung von obiger DGL, $u_1 := \gamma, u_2 := \gamma', \dots, u_n := \gamma^{(n-1)}$, dann ist

$$u' = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)} \\ \gamma^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ -a_{n-1}u_n - a_{n-2}u_{n-1} - \dots - a_0u_1 + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ g \end{pmatrix}$$

2.) Ist umgekehrt $u \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ Lösung von obigem System und $\gamma := u_1$, dann löst $\gamma \in C^n(I \rightarrow \mathbb{R})$ die ursprünglich lineare DGL n -ter Ordnung.

◦

4.6 **Korollar: Folgerung** 1.) Im Fall $g = 0$:

a.) Die Menge der Lösungen

$$L_{\text{hom}} = \{ \gamma \in C^n(I \rightarrow \mathbb{R}) : \dots \}$$

bildet einen linearen Unterraumvektor von $C^n(I \rightarrow \mathbb{R})$ der Dimension n . Die Abbildung

$$P_{x_0} : L_{\text{hom}} \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma \mapsto P_{x_0}(\gamma) := \begin{pmatrix} \gamma(x_0) \\ \gamma'(x_0) \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

×

2.) Inhomogener Fall ($g \neq 0$):

a.) Die Menge der Lösungen \mathcal{L}_{inhom} bildet einen affinen Unterraum von $C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{L}_{inhom} = \{y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n) : y' = A(x)y + g(x)\}$$

Ist $\mathcal{Y}_{part} \in \mathcal{L}_{inhom}$ eine beliebige, aber fest gewählt (partikuläre Lösung), so gilt

$$\mathcal{L}_{inhom} = \mathcal{Y}_{part} + \mathcal{L}_{hom}$$

b.) Nutze Variaton der Konstanten: Ist $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ ein Fundamentalsystem, so ist

$$y(x) = c_1(x)\gamma_1(x) + \dots + c_n(x)\gamma_n(x)$$

genau dann Lösung von $y' = A(x)y + g(x)$, wenn

$$c'_1\gamma_1 + \dots + c'_n\gamma_n = g \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ \det(\dots) = W(x) \neq 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}} = g$$

$$\iff \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}^{-1} g$$

BEWEIS

1.) a.) Nach 4.1 ist $\mathcal{L}_{hom} \neq \emptyset$. Seien $\gamma, \tilde{\gamma}$ Lösungen von $y' = A(x)y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist für $u = \alpha\gamma + \beta\tilde{\gamma}$

$$u' = \alpha\gamma' + \beta\tilde{\gamma}' = \alpha A\gamma' + \beta A\tilde{\gamma}' = Au$$

und damit $u \in \mathcal{L}_{hom}$. Damit ist \mathcal{L}_{hom} Untervektorraum. Die Abbildung P_{x_0} ist linear und wohldefiniert, da die Lösung der DGL eindeutig.

b.) P_{x_0} ist ein Vektorraum-Isomorphismus, da

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \text{ lin. unabhängig} \iff \{P_{x_0}\gamma_1, \dots, P_{x_0}\gamma_n\} \text{ lin. unabhängig,}$$

$$\iff \det(\gamma_1(x_0), \dots, \gamma_n(x_0)) = W(x_0) \neq 0$$

2.) a.) Zeige $\mathcal{Y}_{part} + \mathcal{L}_{hom} \subset \mathcal{L}_{inhom}$. Sei $y \in \mathcal{L}_{inhom}$, $u := y + \mathcal{Y}_{part}$, dann ist

$$u' = y' + \mathcal{Y}'_{part} = Ay + A\mathcal{Y}'_{part} + g = Au + g$$

also $u \in \mathcal{L}_{inhom}$.

Zeige $\mathcal{L}_{inhom} \subset \mathcal{Y}_{part} + \mathcal{L}_{hom}$. Sei $u \in \mathcal{L}_{inhom}$, $y := u - \mathcal{Y}_{part}$, dann ist

$$y' = Au + g - (A\mathcal{Y}_{part} + g) = Ay$$

also $y \in \mathcal{L}_{hom}$ und damit $u = \mathcal{Y}_{part} + y \in \mathcal{Y}_{part} + \mathcal{L}_{hom}$.

1.5 Definition Eine Folge (z_n) in \mathbb{C} konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\varepsilon : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Man schreibt $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ oder $z_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$).

1.6 Satz Es gelte $z_n \rightarrow z$ und $w_n \rightarrow w$ in \mathbb{C} . Dann gelten

1.) $z_n \pm w_n \rightarrow z \pm w$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n.$$

2.) $z_n \cdot w_n \rightarrow z \cdot w$,

3.) Falls $w \neq 0$ und

$$w'_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } w_n = 0 \\ w_n & \text{sonst} \end{cases},$$

dann

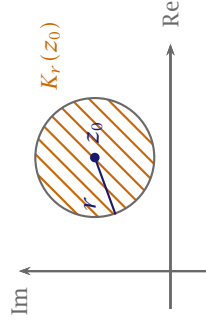
$$\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}.$$

4.) $z_n \rightarrow z \iff \text{Re } z_n \rightarrow \text{Re } z \wedge \text{Im } z_n \rightarrow \text{Im } z$.

1.7 Definition 1.) Seien $r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

offene Kreisscheibe um z_0 .



2.) Eine Teilmenge $O \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen**, falls

$$\forall z \in O \exists r_z > 0 : K_{r_z}(z) \subseteq O$$

$A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, falls $\mathbb{C} \setminus A$ offen.

Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen sind offen. Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist

$$\overset{\circ}{M} := \bigcup_{O \in \{O \subseteq \mathbb{C} : O \text{ offen} \wedge O \subseteq M\}} O \quad (\text{ist offen})$$

das **Innere** von M (die größte offene Menge $O \subseteq M$)

$$\overline{M} := \bigcap_{A \in \{A \subseteq \mathbb{C} : A \text{ abgeschlossen} \wedge M \subseteq A\}} A \quad (\text{ist abgeschlossen})$$

der **Abschluss** von M (die kleinste abgeschlossene Menge A mit $M \subseteq A$)

1.8

➤ **Beispiel** 1.) \emptyset, \mathbb{C} sind offen und abgeschlossen. Alle anderen Teilmengen von \mathbb{C} sind entweder offen, abgeschlossen oder keins von beidem (beispielsweise halboffene Intervalle).

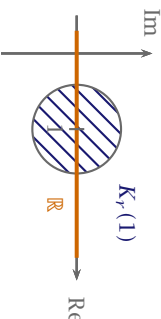
2.) $K_r(z_0)$ ist offen.

$$\overline{K_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

3.) \mathbb{R} ist nicht offen in \mathbb{C} .

Für $z_0 \in \mathbb{R}$ ist für beliebig kleines $r > 0$ stets

$$K_r(z_0) \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset.$$



Ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen? Ja. \Leftrightarrow Ist $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ offen? Ja.

1.9 **Definition** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt f **stetig** in $z_0 \in O$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \forall z \in O : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

oder

$$\forall (z_n) \text{ Folge in } O : z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(z_0).$$

f heißt stetig, falls f in jedem $z_0 \in O$ stetig ist.

1.10 **Satz** 1.) Seien $f, g : O \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in O$, f, g stetig in z . Dann sind

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ falls } g(z_0) \neq 0$$

stetig in z_0 .

4.2 **Bemerkung:** Anwendung von Picard-Lindelöf auf obige Differentialgleichung mit $\gamma(x_0) = \gamma_0$ (für vorgegebenes $(x_0, \gamma_0) \in I \times \mathbb{R}^n$), $B := \mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{R}^n$ und Lipschitzbedingung

$$\|f(x, \gamma) - f(x, \tilde{\gamma})\| = \|A(x)(\gamma - \tilde{\gamma})\| \leq c \|\gamma - \tilde{\gamma}\|$$

für $x \in K \subset I$ mit K kompakt.

Der Satz liefert also eine lokale Lösung $\phi := \gamma \in C^1([x_0 - r, x_0 + r]) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Erneute Anwendung mit Anfangsbedingung $\gamma'(x_0 + r) = \phi'(x_0 + r)$ liefert die Lösung

$$\psi := \gamma \in C^1([x_0 + r - \tilde{r}, x_0 + r + \tilde{r}]) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Zusammenkleben der Lösungen liefert

$$\gamma'(x) = \begin{cases} \phi(x) & x_0 - r \leq x \leq x_0 + r \\ \psi(x) & x_0 + r \leq x \leq x_0 + r + \tilde{r} \end{cases}$$

Dieses γ' ist stetig auf $[x_0 - r, x_0 + r + \tilde{r}]$. Weiter ist γ' stetig auf dem selben Intervall, da

$$\begin{aligned} \phi'(x_0 + r) &= A(x_0 + r)\phi(x_0 + r) + g(x_0 + r) \\ &= A(x_0 + r)\psi(x_0 + r) + g(x_0 + r) \\ &= \psi'(x_0 + r) \end{aligned}$$

Als ist dieses $\gamma \in C^1([x_0 - r, x_0 + r + r]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$\gamma' = A(x)\gamma + g(x) \quad \wedge \quad \gamma(x_0) = \gamma_0$$

Die Fortsetzung ist so lange möglich, bis $\gamma \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ (ohne Beweis).

->

4.3 **Satz** 1.) **Homogener Fall** ($g = 0$):

a.) Die Menge der Lösungen

$$L_{\text{hom}} = \{\gamma \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n) : \gamma' = A(x)\gamma\}$$

bildet einen Untervektorraum von $C^1(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$ der Dimension n . Für festes $x_0 \in I$ ist

$$P_{x_0} : L_{\text{hom}} \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma \mapsto P_{x_0}\gamma := \gamma'(x_0)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus. Eine Basis von L_{hom} heißt Fundamentalsystem (auch im Fall $g \neq 0$).

b.) Für n Lösungen $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in L_{\text{hom}}$ sind äquivalent:

- i.) $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ ist ein Fundamentalsystem
- ii.) $\forall x \in I : W(x) := \det(\gamma_1(x) \dots \gamma_n(x)) \neq 0$ (Wronski-Determinante)
- iii.) $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$.

a.) $F(y)$ ist stetig und

$$\|F(y(x)) - y_0\| \stackrel{3.4}{\leq} \int_{x_0}^x \underbrace{\|f(\xi, y(\xi))\|}_{\leq M} d\xi \leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \delta \stackrel{\text{def } \delta}{\leq} R$$

Also $F(\tilde{D}) \subseteq \tilde{D}$.

b.) Außerdem ist $\tilde{D} \neq \emptyset$, denn $\phi \in \tilde{D}$ für $\phi(x) := y_0$.

c.) F ist eine Kontraktion.

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(\tilde{y})\|_\infty &= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \left\| \int_{x_0}^x (f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, \tilde{y}(\xi))) d\xi \right\| \\ &= \sup_{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta} \underbrace{\left\| \int_{x_0}^x \|f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, \tilde{y}(\xi))\| d\xi \right\|}_{\leq L \|y - \tilde{y}\|_\infty} \\ &\leq L \|y - \tilde{y}\|_\infty \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \delta} \\ &\stackrel{L\delta \leq \frac{1}{2}}{\leq} \frac{1}{2} \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{aligned}$$

Der Banachsche Fixpunktsatz besagt, jetzt

$$\exists! y \in \tilde{B} : F(y) = y$$

also $y \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow B)$ und aus $F(y) = y$ ergibt sich

$$y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi = y(x)$$

Die Äquivalenz zur ursprünglichen DGL liefert somit den Beweis dafür, dass die Lösung eindeutig ist. ■

3-4 Lineare Differentialgleichungen

4.1 **Definition** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I \rightarrow \mathbb{R}^{n^2})$, $g \in C(I \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Die Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{A(x)y + g(x)}_{=R(y)}$$

für die Unbekannte $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$ heißt lineares System 1. Ordnung. Für $g = 0$ nennen wir es homogen, sonst inhomogen. ✕

2.) Sei $f : O \rightarrow \tilde{O} \subseteq \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in O$ und $g : \tilde{O} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $f(z_0)$.

Dann ist $g \circ f$ stetig in z_0 . Beweis über Folgen. ✕

1.11 **Bemerkung:** Stetigkeit genauso für $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit beliebiger Menge $M \subseteq \mathbb{C}$. ->

1.12 **Funktionsfolgen** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n, f : M \rightarrow \mathbb{C}$

1.) (f_n) heißt **punktweise konvergent** gegen f auf M , falls

$$\forall z \in M \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, z} \in \mathbb{N} \forall n > N_{\varepsilon, z} : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

2.) (f_n) heißt **gleichmäßig konvergent** gegen f auf M , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\varepsilon \forall z \in M : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

1.13 **Satz** Seien $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, (f_n) gleichmäßig konvergent auf M gegen f . Dann ist f auch stetig auf M .

BEWEIS Seien $z_0 \in M$, $\varepsilon > 0$ fest und

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

1. **Schritt:** Wähle ein N_ε so, dass $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ für $n > N_\varepsilon$ und beliebige z (gleichmäßige Konvergenz von f_n), also

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z) - f_n(z_0)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{< \varepsilon/3}.$$

2. **Schritt:** Setze $n = N_\varepsilon + 1$ und nutze die Stetigkeit von f_n . Für $|z - z_0| < \delta$ gilt, dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z) - f_n(z_0)|}_{|f_{N_\varepsilon+1}(z) - f_{N_\varepsilon+1}(z_0)| < \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{< \varepsilon/3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.14 **Definition** Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ konvergent ist. ✕

1.15 **Weierstraß-Kriterium** Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n$ mit $a_n \geq 0$ konvergent und gilt $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$, $|f_n(z)| \leq a_n$ auf $M \subseteq \mathbb{C}$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(z)$ gleichmäßig konvergent auf M und absolut konvergent für $z \in M$. ✕

1.16 **Beispiel** Seien $M = \overline{K_2(0)} \subseteq \mathbb{C}$, $f_n(z) = \frac{z^n}{(n+1)^{2n}}$. Wähle

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty, & \text{d.h. konvergent} \\ |f_n(z)| \leq a_n \end{cases}$$

$\Rightarrow g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ ist stetig auf $\overline{K_2(0)}$

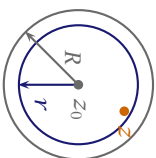
1.17 **Potenzreihen** Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{C} ,

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \text{mit } \frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} = 0.$$

Dann konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

für $|z - z_0| < R$ und divergiert für $|z - z_0| > R$. Sie konvergiert gleichmäßig auf jedem Kreis $\overline{K_r(z_0)}$ mit $0 < r < R$. Insbesondere ist f stetig auf $K_R(z_0)$.



Falls

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

konvergent ist, gilt

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

1.18 **Definition**

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

3.7 **Satz: Picard-Lindelöf** Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $(x_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times B$, $I = [x_0 - r, x_0 + r] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $D := \{\gamma \in B : \|\gamma - \gamma_0\| \leq R\}$ für ein $R \in \mathbb{R}$. Sei $f \in C(I \times D \rightarrow B)$ mit

$$\exists L > 0 \forall (x, \gamma), (x, \tilde{\gamma}) \in I \times D : \|f(x, \gamma) - f(x, \tilde{\gamma})\| \leq L \|\gamma - \tilde{\gamma}\|$$

d.h. f erfüllt eine Lipschitz-Bedingung bezüglich zwei Variablen. Weiter seien

$$M := \sup_{I \times D} \|f(x, \gamma)\| < \infty \quad \delta := \min \left\{ \frac{1}{2L}, \frac{R}{M}, r \right\}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung γ von

$$\gamma \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow B) \tag{3.1}$$

$$\wedge \gamma'(x) = f(x, \gamma(x)) \quad x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \tag{3.2}$$

$$\wedge \gamma(x_0) = \gamma_0 \tag{3.3}$$

BEWEIS 1.) Formuliere eine äquivalente Integralgleichung. γ ist genau dann eine Lösung von (3.1), wenn

$$\gamma \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow B) \quad \wedge \quad \gamma(x) = \gamma_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \gamma(\xi)) d\xi \tag{3.4}$$

mit $\int_{x_0}^x \dots = \int_{x_0}^x \dots$ falls $x < x_0$.

BEWEIS (3.1) \Rightarrow (3.4)

Integriere die Differentialgleichung in (3.1):

$$\int_{x_0}^x \gamma'(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x f(\xi, \gamma(\xi)) d\xi \quad \gamma(x) - \gamma(x_0) = \int_{x_0}^x f(\xi, \gamma(\xi)) d\xi$$

$$(3.4) \Rightarrow (3.1)$$

$f(\xi, \gamma(\xi))$ ist stetig in ξ . Nach dem Hauptsatz ist $\gamma' = 0 + f(x, \gamma(x))$ mit γ' stetig. Für $x = x_0$ in der Integralgleichung: $\gamma'(x_0) = \gamma_0 + 0$. ■

2.) Zeige, dass (3.4) eine eindeutige Lösung besitzt.

BEWEIS Sei $(\tilde{B}, \|\cdot\|)$:= $(C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow B), \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum und

$$\tilde{D} := C([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow D)$$

(abgeschlossene Teilmenge in \tilde{B}) Definiere $T : \tilde{D} \rightarrow \tilde{B} : \gamma \mapsto F(\gamma)$ durch

$$F(\gamma)(x) := \gamma_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \gamma(\xi)) d\xi$$

BEWEIS Schreibe

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x) dx \right\| &= \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} \|S_Z(f)\| \\ &= \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} \left\| \sum_{j=1}^{N(Z)} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right\| \\ &= \limsup_{\delta(Z) \rightarrow 0} \underbrace{\|f(\xi_j)\| (x_j - x_{j-1})}_{=S_Z(\|f\|) - \int_a^b \|f(x)\| dx} \\ &= \int_a^b \|f(x)\| dx \end{aligned}$$

3-5 **Satz: Hauptsatz** Sei $f : [a, b] \rightarrow B$ stetig und $F(x) := \int_a^x f(\xi) d\xi$ ($a \leq x \leq b$).

Dann ist F differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

BEWEIS Für $h > 0$ betrachte

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \underbrace{(F(x+h) - F(x))}_{= \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \text{ (Additivität Integral)}} - f(x) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(\xi) - f(x)) d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \underbrace{\|f(\xi) - f(x)\|}_{< \varepsilon \text{ für } \|\xi - x\| \leq h < \delta \text{ da } f \text{ stetig in } x} d\xi \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon d\xi = \varepsilon \end{aligned}$$

für $h < \delta$.

3-6 **Korollar: Folgerung** Falls $G \in C^1([a, b] \rightarrow B)$ und $G' = f$ (G Stammfunktion von f), dann ist

$$(G - F)' = 0$$

Also (ohne Beweis) $G = F + c$ mit $c \in B$. Damit ist das Integral

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= G(b) - c - (G(a) - c) \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl der Stammfunktion. \times

Bemerkung: Exemplarisch für e^z :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{\frac{(n+1)!}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow R = \infty$, die Potenzreihe ist konvergent auf ganz \mathbb{C} .

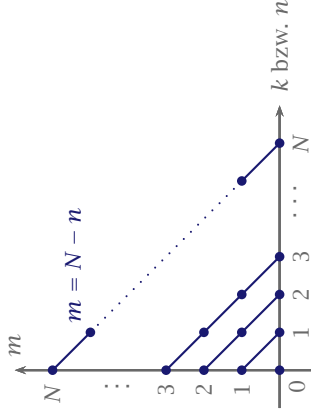
1.19 **Cauchy-Produkt von Reihen** Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent in \mathbb{C} , so gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

BEWEIS Seien

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad B_\ell := \sum_{n=0}^{\ell} b_n$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} a_n b_m = \sum_{n=0}^N a_n \underbrace{\sum_{m=0}^{N-n} b_m}_{B_{N-n}}$$



$$\sum_{\ell=0}^{N-n} a_{N-\ell} (B_\ell - B) + \sum_{n=0}^N a_n B$$

(*) Z.Z. $\rightarrow 0$ $\rightarrow A \cdot B$

$$(*) = \sum_{\ell=0}^{N_\varepsilon} a_{N-\ell} (B_\ell - B) + \sum_{\ell=N_\varepsilon+1}^N a_{N-\ell} (B_\ell - B)$$

1. Schritt: Wähle ein passendes N_ε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell=N_\varepsilon+1}^N a_{N-\ell}(B_\ell - B) \right| &\leq \sup_{\ell \geq N_\varepsilon+1} |B_\ell - B| \sum_{\ell=N_\varepsilon+1}^N |a_{N-\ell}| \\ &\leq \sup_{\ell \geq N_\varepsilon+1} |B_\ell - B| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{da } B_\ell \rightarrow B. \end{aligned}$$

2. Schritt: Abschätzen liefert

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell=0}^{N_\varepsilon} a_{N-\ell}(B_\ell - B) \right| &\leq \max_{0 \leq \ell \leq N_\varepsilon} |B_\ell - B| \sum_{n=N-N_\varepsilon}^{\infty} |a_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } N - N_\varepsilon > \tilde{N}_\varepsilon \text{ da } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |(*)| < \varepsilon$ für $N - N_\varepsilon > \tilde{N}_\varepsilon$ bzw. für $N > \tilde{N}_\varepsilon + N_\varepsilon$.

1.20 **Folgerung**

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}.$$

BEWEIS Wir verwenden die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right)$$

beide Reihen sind absolut konvergent

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} n! \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad \text{Binomischer Lehrsatz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \end{aligned}$$

1.21 **Bemerkung:** Mit der Taylorreihe folgt, dass $e^z \Big|_{z=x \in \mathbb{R}}$, $\cos z \Big|_{z=x \in \mathbb{R}}$ und $\sin z \Big|_{z=x \in \mathbb{R}}$ die selben Funktionen sind, wie die aus der Schule bekannten. ◀

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und Z, Z' zwei Zerlegungen. Definiere

$$Z'' = \left(x_0'', \dots, x_{N(Z)}'', (\xi_1'', \dots, \xi_{N(Z)}'') \right)$$

durch

$$\{x_0'', \dots, x_{N(Z'')}''\} := \{x_0, \dots, x_{N(Z)}\} \cup \{x_0', \dots, x_{N(Z')}'\} \quad \xi_j'' \in [x_{j-1}'', x_j''] \text{ beliebig}$$

Benutze

$$\|S_Z(f) - S_{Z'}(f)\| \leq \|S_Z(f) - S_{Z''}(f)\| + \|S_{Z''}(f) - S_{Z'}(f)\|$$

$$\begin{aligned} \|S_Z(f) - S_{Z''}(f)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{N(Z)} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{N(Z'')} f(\xi_j'')(x_j'' - x_{j-1}'') \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{N(Z'')} f(\xi_{j(j)})(x_j'' - x_{j-1}'') - \sum_{j=1}^{N(Z'')} f(\xi_j'')(x_j'' - x_{j-1}'') \right\| \end{aligned}$$

Dabei ist $J(j)$ so definiert, dass $[x_{j-1}'', x_j''] \subset [x_{J(j)-1}, x_{J(j)}]$, d.h.

$$\begin{aligned} J(j) &:= \min \{k \in \mathbb{N} : x_j'' \leq x_k\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N(Z'')} \|f(\xi_{j(j)}) - f(\underbrace{\xi_j''}_{\in [x_{j(j)-1}, x_{j(j)}]})\| (x_j'' - x_{j-1}'') \end{aligned}$$

Da $|\xi_{j(j)} - \xi_j''| \leq \delta(Z)$ und f gleichmäßig stetig (f stetig und $[a, b]$ kompakt), ist

$$\begin{aligned} \|f(\xi_{j(j)}) - f(\xi_j'')\| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für } \delta(Z) < \delta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{N(Z'')} (x_j'' - x_{j-1}'')}_{=b-a} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Verfahren analog für den anderen Teil, dann ergibt sich

$$\|S_Z(f) - S_{Z'}(f)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \delta(Z), \delta(Z') < \delta$$

3.4 **Satz** Wenn $f : [a, b] \rightarrow B$ stetig ist, dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx$$

3-3 Existenz und Eindeutigkeit

3-1 **Definition** Sei B ein Banachraum.

1.) Sei $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow B$ mit Häufungspunkt x in D . f heißt differenzierbar in x , falls

$$\exists f'(x) \in B : \left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right\| \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0, x+k \in D$$

2.) Für $-\infty < a < b < \infty$ heißt

$$Z([a, b]) = ((x_0, \dots, x_{N(Z)}, (\xi_1, \dots, \xi_{N(Z)}))$$

mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N(Z)} = b$ und $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Weiter heißt

$$S_Z(f) := \sum_{j=1}^{N(Z)} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Riemann-Summe. Definiere die Feinheit von Z als

$$\delta(Z) := \max_{1 \leq j \leq N(Z)} (x_j - x_{j-1})$$

$f : [a, b] \rightarrow B$ heißt Riemann-integrierbar, falls

$$\exists I \in B : \|S_Z(f) - I\| \rightarrow 0 \quad \delta(Z) \rightarrow 0$$

schreibe

$$I := \int_a^b f(x) dx$$

3-2 **Korollar: Folgerung** Für $a < c < b$ gilt

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

3-3 **Satz** Wenn $f : [a, b] \rightarrow B$ stetig ist, dann ist f Riemann-integrierbar.

BEWEIS Zeige: falls $\delta(Z), \delta(Z') < \delta$, dann ist $\|S_Z(f) - S_{Z'}(f)\| < \epsilon$. Für jede Folge Z_n von Zerlegungen mit $\delta(Z_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt dann.

- 1.) $(S_{Z_n}(f))$ ist Cauchy-Folge in B , also konvergent.
- 2.) $I := \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f)$ ist unabhängig von der Folge (Z_n) .

1.22 **Folgerung** 1.) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ für $z \in \mathbb{C}$ (Eulersche Formel),

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2.) Mit der Polardarstellung: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ gilt

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

1.23 **Definition** 1.) $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in $z_0 \in O$, falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert; $f'(z_0)$ heißt Ableitung von f in z_0 .

2.) f heißt differenzierbar, falls f in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ differenzierbar ist. $f' : O \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Ableitungsfunktion von f . X

1.24 **Beispiel** 1.) Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto c$ ist $f'(z) = 0$.

2.) Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z$ ist $f'(z) = 1$.

3.) Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ ist $f'(z) = n z^{n-1}$.

4.) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto |z|^2$ ist in $z_0 \neq 0$ nicht differenzierbar.

Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$:

$$z_h = x_0 + h + iy_0 \implies \frac{|z_h|^2 - |z_0|^2}{z_h - z_0} = \frac{2hx_0 + h^2}{h} \rightarrow 2x_0 \quad (h \rightarrow 0),$$

$$z_h = x_0 + i(y_0 + h) \implies \frac{|z_h|^2 - |z_0|^2}{z_h - z_0} = \frac{2hx_0 + h^2}{-ih} \rightarrow -i2x_0 \quad (h \rightarrow 0)! \blacktriangleleft$$

1.25 **Satz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : O \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- i.) f ist differenzierbar in z_0 mit Ableitung $f'(z_0)$.
- ii.) $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathcal{O}(|z - z_0|)$.

BEWEIS i.) $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$.

ii.) $\frac{r(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)}{z - z_0} \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$. ■

1.26 **Satz** 1.) f differenzierbar in $z_0 \implies f$ stetig in z_0 .

- 2.) $(f + g)' = f' + g'$.
 3.) $(f g)' = f' g + f g'$.
 4.) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$ falls $g(z_0) \neq 0$.
 5.) $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$.

✕

1.27 **Beispiel** 1.) Polynomfunktionen sind differenzierbar auf \mathbb{C} (folgt aus 1.24, 3.) und 1.26, 2.).

2.) Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. **►**

1.28 **Definition** 1.) Sei $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{C})$ (also auch $\operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \in C^1$). Dann heißt γ Weg von $z_1 = \gamma(a)$ nach $z_2 = \gamma(b)$. Falls $z_1 = z_2$, heißt γ geschlossen.

2.) Sei γ ein Weg und $f \in C(\operatorname{Bild}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C})$. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b [\operatorname{Re}(f(\gamma(t))) \operatorname{Re}(\gamma'(t)) - \operatorname{Im}(f(\gamma(t))) \operatorname{Im}(\gamma'(t))] dt$$

$$+ i \int_a^b [\operatorname{Im}(f(\gamma(t))) \operatorname{Re}(\gamma'(t)) + \operatorname{Re}(f(\gamma(t))) \operatorname{Im}(\gamma'(t))] dt$$

das Integral von f längs γ .

✕

1.29 **Bemerkung:** 1.) Ist γ' eine andere Parametrisierung des Weges γ , sodass folgende Eigenschaften gelten

$$\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \varphi)(s) \quad \text{für } a' \leq s \leq b',$$

$$\varphi \in C^1([a', b'] \rightarrow [a, b]), \quad \varphi(a') = a, \quad \varphi(b') = b.$$

Dann folgt aus der Substitutionsregel für reelle Integration

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \quad \left(t = \varphi(s), \frac{dt}{ds} = \varphi'(s) \right)$$

$$= \int_{a'}^{b'} \underbrace{f(\gamma(\varphi(s)))}_{f(\tilde{\gamma}(s))} \underbrace{\gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s)}_{\frac{d}{ds} \tilde{\gamma}(s) = \frac{d}{ds} (\gamma \circ \varphi)(s)} ds$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

Die Lösungen sind gegeben durch (gehe Blockweise von unten nach oben vor und nutze die umgekehrte Produktregel):

$$u_3 = c_3 e^{\lambda_1 t}$$

$$u_2 = c_2 e^{\lambda_1 t} + c_3 t e^{\lambda_1 t}$$

$$u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t}$$

Rücktransformation ergibt dann

$$\gamma'(t) := T u(t)$$

3.2.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Seien a_0, \dots, a_{n-1} gegeben, gesucht ist $\gamma \in C^n(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ mit

$$\gamma^n = a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma' + a_0 \gamma$$

Setze dazu

$$u_1 := \gamma \quad u_2 := \gamma' \quad \dots \quad u_n := \gamma^{(n-1)}$$

Es ergibt sich im Beispiel für die DGL

$$\gamma^{(n)} = \gamma'$$

$$u_1' = u_2 \quad u_2' = u_3$$

$$u_3' = \gamma^{(n)} = \gamma' = u_2$$

Löse dieses System und setze dann

$$\gamma'(t) := u_1(t)$$

Die Eindeutigkeit ist durch die Anfangsbedingungen

$$\gamma'(t_0) = \gamma_0, \quad \gamma''(t_0) = \gamma_1, \quad \gamma^{(n)}(t_0) = \gamma_2$$

gegeben.

damit gilt

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{c_j e^{\lambda_j t_0}}_{=: d_j} v_j = \gamma_0$$

Die d_j existieren und sind eindeutig, da $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis ist. Also existieren auch die

$$c_j = e^{-\lambda_j t_0} d_j$$

und sind eindeutig.

Beobachtungen ▶ Es existiert immer eine globale Lösung.

- ▶ Die Lösungsgesamtheit ist durch n skalierbare Gleichungen gegeben mit Parametern c_j .
- ▶ Die Eindeutigkeit ist stets durch die Anfangsbedingung gewährleistet.
- ▶ Für festes $t \in \mathbb{R}$ hängt $\gamma(t)$ stetig von (t_0, γ_0) ab.
- ▶ Der Lösungsraum ist ein reeller linearer Raum mit Basis

$$\{t \rightarrow e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, t \rightarrow e^{\lambda_n t} v_n\}$$

Fall 2: sonst Bilde die Jordan-Normalform:

$$J = T^{-1}AT$$

beispielsweise

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Setze $u(t) := T^{-1}\gamma(t)$ für eine Lösung $\gamma(t)$. Dann ist

$$u'(t) = T^{-1}\gamma'(t) = T^{-1}A\gamma(t) = T^{-1}ATu(t)$$

Also

$$\gamma' = A\gamma \iff u' = Ju$$

Wir können also statt $\gamma' = A\gamma$ das System $u' = Ju$ berechnen und anschließend zurücktransformieren. In unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \lambda_1 u_1 + u_2 \\ u'_2 &= \lambda_1 u_2 + u_3 \\ u'_3 &= \lambda_1 u_3 \end{aligned}$$

2.) $-\gamma$ ist der zu γ entgegengesetzt orientierte Weg.

$$-\gamma'(t) = \gamma'(a+b-t), \quad a \leq t \leq b.$$

Es gilt

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3.) Jede Kurve kann so umparametrisiert werden, dass $a = 0$ und $b = 1$ gilt.

4.) Verbindungsstrecke: $\gamma = [z_1, z_2]$

$$\iff \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \leq t \leq 1$$



5.) Verallgemeinerung: Ein Weg kann auch nur stückweise C^1 sein.

$$\gamma \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{C})$$

Es existieren $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, sodass

$$\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}).$$

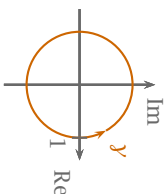
(das heißt, die Ableitung darf endlich viele Sprünge haben). Dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

1.30 ▶ **Beispiel** 1.) $f(z) = z^3, \gamma = [0, 1+i]$

$$\begin{aligned} \int_{[0, 1+i]} z^3 dz &= \int_0^1 (t(1+i))^3 (1+i) dt \\ &= (1+i)^4 \int_0^1 t^3 dt \\ &= \frac{(1+i)^4}{4} \end{aligned}$$

2.) $f(z) := \frac{1}{z}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Da $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ ist der Weg geschlossen.



$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi i \neq 0$$

▶

1.31 **Satz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $F : O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $f = F'$ in O (das heißt, F ist eine Stammfunktion von f). Ist γ ein Weg in O , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

BEWEIS Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) &= \lim_{s \rightarrow t+\epsilon} \frac{F(\gamma(s)) - F(\gamma(t))}{\gamma(s) - \gamma(t)} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \\ &= F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t) \end{aligned}$$

können wir die Kettenregel verwenden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \operatorname{Re} F(\gamma(t)) + i \frac{d}{dt} \operatorname{Im} F(\gamma(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung im Reellen gilt

$$\begin{aligned} &= \left(\operatorname{Re} F(\gamma(b)) + i \operatorname{Im} F(\gamma(b)) \right) - \left(\operatorname{Re} F(\gamma(a)) + i \operatorname{Im} F(\gamma(a)) \right) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

■

1.32 **Folgerung** 1.) Besitzt f eine Stammfunktion und ist γ geschlossen, so folgt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beobachtungen Für $\gamma_0 \neq 0$ geht durch jeden Punkt genau eine Lösung: (jetzt exemplarisch für $\gamma_0 > 0$):

$$\gamma(x) = \frac{1}{27}(x+c)^3 \quad c = 3\gamma_0^{\frac{1}{3}} - x_0$$

Dies ist wegen der Bedingung $x > -c$ keine globale Lösung (*lokale Lösung*).

Setzt man diese Lösung fest zu einer globalen Lösung, geht die Eindeutigkeit verloren. Man kann beispielsweise den unteren Ast an einer beliebigen Stelle $r \leq 0$ ansetzen:

$$\gamma_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}x^3 & x > 0 \\ 0 & r \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{27}(x-r)^3 & x < r \end{cases} \quad \forall r \leq 0$$

Insbesondere gehen durch $(x_0, 0)$ beliebig viele Lösungen.

-

3.2.3 Systeme von Differentialgleichungen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Gesucht ist $\gamma \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ mit

$$\gamma' = A\gamma$$

ausgeschrieben ergeben sich

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n \\ &\vdots \\ \gamma'_n &= a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + a_{nn}\gamma_n \end{aligned}$$

also n gekoppelte Differentialgleichungen.

Fall 1: v_1, \dots, v_n bildet eine Basis aus Eigenvektoren: $Av_j = \lambda_j v_j$. Dann ergibt sich die Lösung als

$$\gamma(t) := \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} v_j \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

denn

$$\gamma' = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j e^{\lambda_j t} v_j = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} A v_j = A \gamma(t)$$

Die Eindeutigkeit ist durch Anfangsbedingungen gegeben:

$$\gamma'(t_0) = \gamma_0 \quad t_0 \in \mathbb{R}, \gamma_0 \in \mathbb{R}^n$$

b.) Für $\gamma \neq (n + \frac{1}{2})\pi$ ergibt sich nach der Merkmregel

$$\int \frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma} = \int \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow \tan \gamma = \sin x + c$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \arctan(\sin x + c) + n\pi$$

Die Lösungen sind demnach alle Funktionen der Form

$$\gamma(x) = \arctan(\sin x + c) + n\pi \quad c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

Beobachtungen ▶ Durch jeden Punkt (x_0, γ_0) geht genau eine Lösung:

$$\gamma(x) = \arctan(\sin x + \underbrace{\tan \gamma_0 - \sin x_0}_{=c})$$

falls $-\frac{\pi}{2} < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$.

- ▶ Jede Lösung ist auf ganz \mathbb{R} definiert: *globale* Lösung.
- ▶ Für festes $x_1 \in \mathbb{R}$ hängt $\gamma(x_1)$ stetig von (x_0, γ_0) ab.
- ▶ Die Lösungsvielfalt ist durch die Parameter c und n beschrieben.
- ▶ Die Lösung ist eindeutig durch die *Anfangsbedingung*

$$\gamma(x_0) = \gamma_0$$

vorgegeben (für gegebenes x_0, γ_0).

2.3 ▶ **Beispiel** Sei folgende DGL gegeben

$$\gamma' = (\gamma^2)^{\frac{1}{3}}$$

a.) Die konstante Lösung ergibt sich als

$$\gamma(x) = 0$$

b.) Für $\gamma > 0$ oder $\gamma < 0$ ergibt sich nach der Merkmregel

$$3\gamma^{\frac{1}{3}} = \int \frac{d\gamma}{\gamma^{\frac{2}{3}}} = \int dx = x + c$$

für $x > -c$ im Fall $\gamma > 0$, und für $x < -c$ im Fall $\gamma < 0$. Es ergibt sich dann

$$\gamma(x) = \frac{1}{27}(x + c)^3$$

2.) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt keine Stammfunktion (siehe 1.30, 2.).

1.33 **Satz** Sei γ ein Weg, $f \in C(\text{Bild}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C})$. Dann

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

$$\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

BEWEIS Es gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = e^{i\varphi} \int_{\gamma} f(z) dz$$

mit $\varphi = -\arg(\int_{\gamma} f(z) dz)$

$$= \int_a^b e^{i\varphi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b \text{Re}(e^{i\varphi} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt + i \int_a^b \text{Im}(e^{i\varphi} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt$$

$$\leq \int_a^b |\text{Re}(e^{i\varphi} f(\gamma(t)) \gamma'(t))| dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{i\varphi} f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{i\varphi}| |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

Genau so, falls γ nur stückweise C^1 . ■

1.34 **Definition**

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

heißt **Länge** von γ . Damit wird 1.33 zu

|Integral von f über γ | \leq (Länge von γ) $(\max |f|$ auf $\gamma)$. ✕

1.35 **Beispiel** 1.) $\gamma := [z_1, z_2]$, $\gamma'(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$

$$L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$$

2.) $\gamma := e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

a.)

$$|2\pi i| = \left| \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \right| \leq \max_{z=e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi} \left| \frac{1}{z} \right| \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = 2\pi$$

b.)

$$|0| = \left| \int_{\gamma} z dz \right| \leq \max_{z=e^{it}} |z| \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = 2\pi$$



1.36 **Satz** Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{C} , $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{für } |z| < R$$

auf dem offenen Konvergenzkreis $\mathring{K}_R(0)$ beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}, \quad \dots$$

BEWEIS Seien

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \quad R' := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n n|}}$$

dann gilt

1.) $R' = R$ wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Das heißt: g ist auf demselben $K_R(0)$ definiert wie f .

2.) $g = f'$. Seien $w \in K_R(0)$, $z \in K_R(0) \setminus \{w\}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right)}_{(*)} \\ (*) &= \left| \frac{1}{z - w} \int_{[w, z]} (n w^{n-1} - n w^{n-1}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - w|} L([w, z]) n |z^{n-1} - w^{n-1}| \\ &\Rightarrow \begin{cases} (*) \rightarrow 0, & \text{für } z \rightarrow w \\ |a_n(\dots)| \leq n |z|^{n-1} + n |w|^{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2.2 Separierbare Differentialgleichungen

Seien $I_f, I_g \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f \in C(I_f \rightarrow \mathbb{R})$, $g \in C(I_g \rightarrow \mathbb{R})$. Gesucht ist ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$, sodass

$$\gamma' = f(x)g(\gamma)$$

Die Variablen sind also separierbar.

a.) Falls $g(\gamma)$ in γ_0 eine Nullstelle hat, dann existiert die konstante Lösung:

$$\gamma'(x) = \gamma_0$$

Alle Nullstellen von $g(\gamma)$ repräsentieren also konstante Lösungen.

b.) Sei $\gamma \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$ eine Lösung mit $g(\gamma'(x)) \neq 0$ für $x \in I$. Forme $\gamma'(x) = g(\gamma(x))g(\gamma'(x))$ um und betrachte die Stammfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'(x)}{g(\gamma(x))} &= f(x) \\ \Leftrightarrow G(\gamma(x)) + c_1 &:= \int \frac{1}{g(\gamma)} d\gamma = \int \frac{\gamma'(x)}{g(\gamma(x))} dx = \int f(x) dx =: F(x) + c_2 \\ \Leftrightarrow G(\gamma(x)) &= F(x) + c \end{aligned}$$

da $G' = \frac{1}{g} \neq 0$ ist G injektiv und lokal umkehrbar.

$$\Leftrightarrow \gamma(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

Merksregel

$$\frac{d\gamma}{dx} = f(x)g(\gamma)$$

Alle γ nach links, x nach rechts und Integral davor:

$$\int \frac{d\gamma}{g(\gamma)} = \int f(x) dx$$

2.2 **Beispiel** Sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\gamma' = \cos^2 \gamma \cos x$$

a.) Die konstante Lösung ergibt sich für $\cos^2 \gamma = 0$, also sind alle Funktionen der Form

$$\gamma(x) = (n + \frac{1}{2})\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

konstante Lösungen.

2.) Ist $x_0 \in D$ und $x_n := F(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$x_n \rightarrow x \quad n \rightarrow \infty$$

mit der Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|$$

BEWEIS 1.) Eindeutigkeit: Seien x, y zwei Fixpunkte, dann ist

$$\|x - y\| = \|F(x) - F(y)\| \leq q \|x - y\|$$

wegen $q < 1$ folgt $\|x - y\| = 0$, also $x = y$.

2.) Wegen $F(D) \subset D$ ist x_n für $n \in \mathbb{N}_0$ wohldefiniert.

Zeige zunächst

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|$$

induktiv.

Für den Rest (1.4) siehe Numerik (wurde dort schöner bewiesen). ■

1.4 **Bemerkung:** Es lässt sich ebenfalls zeigen:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{1-q} \|x_{n+1} - x_n\|$$

◦

3.2 Beispiele

3.2.1 Tee

Beschreibe $y(t)$ die Temperatur des Tee's und $y_A = \text{const.}$ die Außentemperatur. Es gilt folgende Differentialgleichung

$$y'(t) = -K(y(t) - y_A)$$

Die Lösung lautet

$$y(t) = y_A + ce^{-Kt} \quad t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Probe:

$$y' = c(-K)e^{-Kt} = -K(ce^{-Kt}) = -K(y(t) - y_A)$$

Die Lösung ist erst eindeutig, wenn z.B. $y(t_0) = y_0$ vorgegeben wird (Anfangsbedingung).

2.1 **Definition: nicht-formale Beschreibung** Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion y , in der auch die Ableitung(en) von y auftreten. Sie heißt gewöhnlich, falls keine partiellen Ableitungen auftreten, sonst partiell ✕

Die Reihe konvergiert also gleichmäßig in $K_r(0)$ für jedes $r < R$. Der Grenzwert von $z \rightarrow w$ und die Reihe sind vertauschbar, also

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

1.37 ▶ **Beispiel** 1.)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} \stackrel{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

2.)

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right)' \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &\stackrel{k=n-1}{=} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= -\sin z, \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

3.) Genauso für $(\sin z)' = \cos z$. ◀

1.38 **Definition** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0, 1] \rightarrow O)$. Dann heißen γ_1, γ_2 C^1 -homotop in O , falls es eine Abbildung $\Phi \in C^1([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow O)$ gibt, sodass

$$\Phi(\cdot, 0) = \gamma_1, \quad \Phi(\cdot, 1) = \gamma_2$$

und eine der folgenden Bedingungen

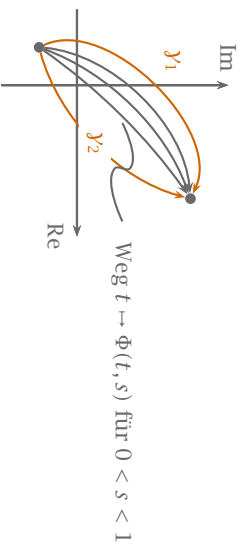
i.) $\Phi(0, s) = \gamma_1(0)$, $\Phi(1, s) = \gamma_1(1)$ für $0 \leq s \leq 1$. Insbesondere folgt daraus, dass $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Die Kurven stimmen also in den Anfangs- und Endpunkten überein.

ii.) $\Phi(0, s) = \Phi(1, s)$ für $0 \leq s \leq 1$. γ_1 und γ_2 sind also geschlossen, ebenso die Wege $\beta_s := \Phi(\cdot, s)$.

Wir schreiben $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (\sim ist eine Äquivalenzrelation). Φ heißt Homotopie zwischen γ_1 und γ_2 . Ein geschlossener Weg γ heißt nullhomotop, falls γ homotop zu einem konstanten Weg ist. ✕

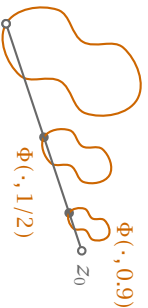
- 1.39 **Beispiel** 1.) a) $O = \mathbb{C}$. Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0, 1] \rightarrow \mathbb{C})$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, dann gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2$:

$$\Phi(t, s) := \gamma_1(t) + s(\underbrace{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}_{=0 \text{ für } t=0, t=1})$$

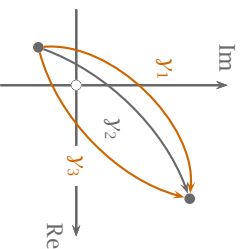


- b) Jeder geschlossene Weg $\gamma \in C^1([0, 1] \rightarrow \mathbb{C})$ ist in $O \subseteq \mathbb{C}$ nullhomotop: Sei $\gamma_2(t) = z_0 \in \mathbb{C}$ fest.

$$\Phi(t, s) := \gamma(t) + s(z_0 - \gamma(t))$$



- 2.) $O = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
a.)



Offensichtlich: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, aber nicht $\gamma_1 \sim \gamma_3$ und auch nicht $\gamma_2 \sim \gamma_3$, weil wir über die 0 hinüber müssten.

Anschaulich: Zwei Wege sind homotop, wenn »dazwischen« nur Elemente aus O liegen.

3

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

3.1 Funktionalanalysis

- 1.1 **Definition** Sei $(B, +, \cdot)$ ein linearer Raum (d.h. ein Vektorraum) und $\|\cdot\| : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm (d.h. $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \iff u = 0$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ und $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$). Ist B vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B$ konvergiert gegen einen Grenzwert in B , so nennt man B mit der Norm $\|\cdot\|$ Banachraum. \times

- 1.2 **Beispiel** 1.) Die komplexen Zahlen mit der p -Norm

$$B := \mathbb{C}^n, \quad \|u\| := (|u_1|^p + \dots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

- 2.) Sei $B = C([a, b] \rightarrow \mathbb{C})$ mit der Norm

$$\|f\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

z.B. $\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$, dann ist B kein Banach-Raum (Der Raum ist zwar normiert, aber nicht vollständig; ohne Beispiel).

- 3.) Definiere

$$L^p(I) := \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar} \wedge \int_I |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann bildet $L^p(I)$ mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Identifiziere f, \tilde{f} , falls $\int |f - \tilde{f}| d\mu = 0$) einen Banachraum. \blacktriangleright

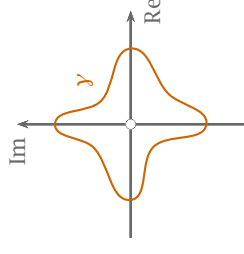
- 1.3 **Satz: Banachscher Fixpunktsatz** Sei B ein Banachraum, $\emptyset \neq D \subset B$ mit D abgeschlossen und $F : D \rightarrow B$ eine Kontraktion, d.h.

$$\exists q \in [0, 1[\forall x, y \in D : \|F(x) - F(y)\| \leq q \|x - y\|$$

mit $F(D) \subset D$. Dann gilt

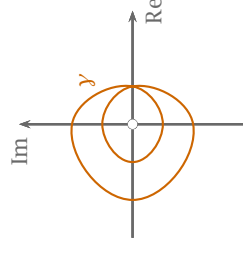
- 1.) Es existiert $x \in D$ mit $F(x) = x$, d.h. die Abbildung F hat genau einen Fixpunkt $x \in D$.

b.)



γ ist nicht nullhomotop, aber $\tilde{\gamma} : t \mapsto e^{i2\pi t}, 0 \leq t \leq 1$

c.)



$\gamma \sim \tilde{\gamma} : t \mapsto e^{i4\pi t}, 0 \leq t \leq 1$. Zweimal durchlaufener Kreis. ◀

1.2 Holomorphie und Analytizität

2.1 **Vereinbarung** Zu $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ setzen wir

$$\tilde{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in O\},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \tilde{O} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + iy) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) \end{pmatrix}.$$

f wird interpretiert als Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . ✕

2.2 **Satz** $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- i.) f ist differenzierbar (in O).
- ii.) f stetig (in O) und für alle Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0, 1] \rightarrow O)$ gilt

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \implies \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

iii.) f stetig und für alle $\gamma \in C^1([0, 1] \rightarrow O)$ gilt γ nullhomotop $\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

iv.) Für jedes $z_0 \in O$ existiert $R > 0$, (a_n) Folge in \mathbb{C} , sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{für } |z - z_0| < R.$$

v.) f ist in O beliebig oft differenzierbar.

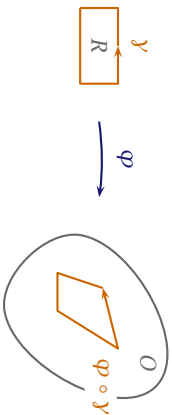
vi.) $u, v \in C^1(\tilde{O} \rightarrow \mathbb{R})$ und u, v erfüllen die **Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen**:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x, \quad \text{in } \tilde{O}.$$

2.3 **Definition** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$. Erfüllt f eine (und damit alle) Bedingungen aus 2.2, so heißt f **holomorph** (dies betont die beliebige Differenzierbarkeit) oder **analytisch** (dies betont iv.).

2.4 **Cauchy'scher Integralsatz für die Bilder von Rechtecken** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $R = [a, b] \times [c, d]$, $\varphi \in C^1(R \rightarrow O)$, γ die geschlossene Randkurve von R (stückweise C^1). Dann

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = 0.$$



BEWEIS 1.) $\varphi \in C^1(R \rightarrow O) \implies \varphi \circ \gamma$ ist stückweise C^1 , also ein Weg in O .

2.) Da R kompakt und $\partial_1 \varphi$ und $\partial_2 \varphi$ stetig auf R :

$$|\nabla \varphi| = \left| \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix} \right| \leq c \quad (\leq \infty) \quad \text{auf } R.$$

3.) Konstruiere eine Folge (R_n) von Rechtecken mit Randkurven γ_n :

$$R_0 := R, \quad \gamma_0 = \gamma.$$

Integriere jetzt partiell und beachte: $(\psi_j a) \circ \psi = 0$ für $\gamma_l = \pm \sqrt{1 - |\gamma^{(l)}|^2}$ da $\text{supp} \psi_j \leq U_j$. Außerdem $\sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \partial_l \gamma_l (\det(\dots)) = 0$ (Nachrechnen).

$$= \int_0^1 \int_{\partial_j} \psi \omega \stackrel{U_j = \phi_j^{-1}(K_j^{(k)}(0))}{=} \int_{\gamma^{(j)} \in K_j^{(k)}(0)} (-1)^{j+1} \int_{\gamma^{(j)} \in K_j^{(k)}(0)} (\psi_j a) \circ \phi_j(0, \gamma^{(j)}) \det \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma^{(j)}} \right) d\gamma$$

8.8 **Bemerkung:** 1.) Im Fall $k = 0$, $\omega = a(x)$, $S = \phi([\alpha, \beta])$, $\partial S = \{\phi(\alpha), \phi(\beta)\}$. Nach 8.4:

2.) Satz von Stokes gilt auch für $S = {}_O$, d.h. $S \subset O$ nicht notwendig.

3.) Folgerungen

a.) Der Satz von Gauß-Ostrogradski: Sei $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

$$\int_S \nabla \cdot f dV^{(n)} = \int_{\partial S} \langle f, n_0 \rangle dV^{(n-1)}$$

Setze dazu $\omega := \sum_{j=1}^n (f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n)$

b.) Klassischer Satz von Stokes: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 und $f \in C^1(S \rightarrow \mathbb{R}^3)$, dann gilt

$$\int_S (\nabla \times f) dV^{(2)} = \int_{\partial S} \langle f, t_0 \rangle dV^{(1)}$$

Setze dazu $\omega := f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$.

2.) Lokalisierung: Sei $A(S)$ orientierter Atlas, sortiert wie in 8.6.

$$\begin{aligned} \int_S d\omega &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \psi_j d\omega \\ &= \sum_{i=1, j=1}^N \int_{U_j} \partial_{x_i}(\psi_j a) dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i=1, j=1}^N \int_{U_j} \underbrace{(\partial_{x_i} \psi_j) a dx_i \wedge dx_j}_{\int_S (\sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \psi_j) a dx_i \wedge dx_j} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \underbrace{d(\psi_j \omega)}_{\int_S (\sum_{j=1}^N \psi_j) d\omega} \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\int_{U_j} d(\psi_j \omega) = \begin{cases} \int_{U_j \cap \partial S} \psi_j \omega & 1 \leq j \leq L \\ 0 & L+1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Dann gilt, da $\{\psi_1, \dots, \psi_L\}$ eine Zerlegung der Eins ist für ∂S mit Atlas $\{(\phi_j, \tilde{U}_j), 1 \leq j \leq L\}$

$$\int_S d\omega = \sum_{j=1}^L \int_{U_j} \psi_j \omega = \int_{\partial S} \omega$$

3.) Sei $j = \{1, \dots, N\}$ fest, $\phi_j = (g_1, \dots, g_n)$, $D = K_1^{(k+1)}(0)$ falls $1 \leq j \leq L$, $D = K_1^{(k+1)}(0)$ sonst. Also

$$\int_{U_j} d(\psi_j \omega) = \sum_{i=1}^n \int_{y \in D} \partial_{x_i}(\psi_j a)(\phi_j(y)) \det\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial y}\right) dy$$

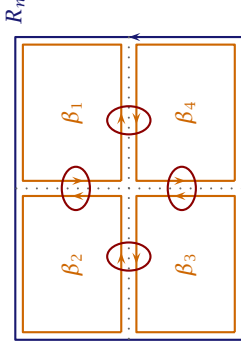
Entwickeln der Determinante nach der ersten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+1} \int_{y \in D} \partial_{x_i}(\psi_j a)(\phi_j(y)) \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(y) \cdot \det\left(\underbrace{\frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(y_1, \dots, y_{l-1}, y_{l+1}, \dots)}}_{y^{(l)}}\right) dy \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \int_{y \in D} \partial_{y_l}((\psi_j a) \circ \phi_j)(y) \det(\dots) dy \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} \int_{y^{(l)} \in K_1^{(k)}(0)} \int_{y_l = -\sqrt{1-|y^{(l)}|^2}}^{y_l = +\sqrt{1-|y^{(l)}|^2}} \dots dy_l dy^{(l)} \end{aligned}$$

Teile R_n durch Seitenhalbierung in vier Rechtecke. Wähle als R_{n+1} dasjenige der vier, für das

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma_{n+1}} f(z) dz \right|$$

am größten ist.



Integrale über die rot markierten Teile heben sich gegenseitig weg.

$$\int_{-y}^{-y} f(z) dz = - \int_y^y f(z) dz.$$

Daraus folgt

$$\int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\varphi \circ \beta_j} f(z) dz.$$

Weiterhin folgt

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\varphi \circ \beta_j} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\varphi \circ \gamma_{n+1}} f(z) dz \right|.$$

Durch vollständige Induktion zeigt sich

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right|.$$

4.) Sei x_n der Mittelpunkt von R_n , dann gilt

$$\forall x \in R_n : |x - x_n| < \frac{1}{2^n} L(\gamma_0).$$

Für $m \geq n$ folgt dann

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} L(\gamma_0), \text{ da } R_m \subseteq R_n.$$

Also ist (x_n) Cauchy: $x_m \rightarrow y \in R_0$.

Für $m \geq n$ gilt $x_m \in R_n$, daraus folgt

$$|x_n - \gamma| \leq \frac{1}{2^n} L(\gamma_0).$$

5.) Aus $x_n \rightarrow \gamma \in R_0$ folgt mit der Stetigkeit von φ

$$\varphi(x_n) - \varphi(\gamma) = z_0 \in O$$

Sei nun $z = \varphi(x)$ mit $x \in R^n$, dann folgt

$$|\operatorname{Re}(z - z_0)| = |\operatorname{Re} \varphi(x) - \operatorname{Re} \varphi(\gamma)|$$

und mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &= |\nabla(\operatorname{Re} \varphi)(\xi)(x - \gamma)| \\ &\leq c|x - \gamma| \leq c \frac{1}{2^n} L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Genauso für $\operatorname{Im} z$

$$|z - z_0| \leq \sqrt{2} c \frac{1}{2^n} L(\gamma_0).$$

6.) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z, z_0)$$

mit

$$\frac{|r(z, z_0)|}{|z - z_0|} < \varepsilon \quad \text{für } |z - z_0| < \delta$$

Für $n \geq N_\delta$ und gilt

$$|z - z_0| < \delta \quad \forall z \in \varphi(R_n)$$

Bemerkung: $|z_n - z_0| < \frac{\delta}{2}$ für $n \geq \tilde{N}_\delta$

$$|z - z_n| = |\varphi(\gamma) - \varphi(x_n)| \leq c|\gamma - x_n| < \frac{4}{2} \frac{\delta}{2} \text{ für } n > \tilde{\tilde{N}}_\delta$$

und somit

$$|r(z, z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \leq \sqrt{2} c \frac{\varepsilon}{2^n} L(\gamma_0), \quad z, z_0 \in \varphi(R_n)$$

dies gilt offensichtlich nach Definition, denn

$$d(dx_j) = d(1 \cdot dx_j) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n (\delta_{xi} 1) dx_i \wedge dx_j$$

Nochmaliges Anwenden der Produktregel unter Betrachtung von Fall a) und Vorherigem führt zu:

$$d^2 \omega = \underbrace{d^2 a_j}_{=0 \text{ Fall a)}} \wedge dx_j + (-1)^1 da_j \wedge \underbrace{d^2 x_j}_{=0 \text{ Vorh.}} = 0 \quad \blacksquare$$

8.6 **Definition** Sei S k -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit ($k \geq 2$) mit Rand und orientiertem Atlas $A(S) = \{(\phi_1, U_1), \dots, (\phi_N, U_N)\}$. Im Unterschied zu 4.4 sollen als Definitionsbereiche für die ϕ_j zugelassen sein: $K_1^{(k)}(0)$ oder $K_1^{(k)-}(0) := \{\gamma \in K_1^{(k)}(0) : \gamma_1 \leq 0\}$. Sei $A(S)$ so sortiert, dass ϕ_1, \dots, ϕ_L auf $K_1^{(k)-}(0)$ definiert sind und $\phi_{L+1}, \dots, \phi_N$ auf $K_1^{(k)}(0)$. Dann ist

$$A(\delta S) := \{(\tilde{\phi}_1, \tilde{U}_1), \dots, (\tilde{\phi}_L, \tilde{U}_L)\}$$

mit $\tilde{\phi}_j(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) := \phi_j(0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1})$ und $\tilde{U}_j := U_j \cap \delta S = \tilde{\phi}_j(K_1^{(k-1)-}(0))$ ein orientierter Atlas von δS . Die so definierte Orientierung heißt *verträglich* zur Orientierung von S . Ist $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ Zerlegung der Eins passend zu $A(S)$, so $\{\psi_1, \dots, \psi_L\}$ Zerlegung der Eins zu $A(\delta S)$ und es gilt $\int_{\delta S} \omega = \sum_{j=1}^L \int_{\tilde{U}_j} \psi_j \cdot \omega$ für jede $(k-1)$ -Form ω . \times

8.7 **Satz von Stokes** Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, ω eine k -Form der Klasse C^1 in O , $S \subset O$ kompakte orientierte C^2 -Mannigfaltigkeit der Dimension $k+1$. Dann gilt:

$$\int_{\delta S} \omega = \int_S d\omega$$

falls S , δS verträglich orientiert wird. \times

BEWEIS 1.) Es gelte o.B.d.A

$$\omega = a(x) dx_j \quad j \in G^{(k)}$$

2.) Sei ω_1 eine k -Form und ω_2 eine l -Form, jeweils der Klasse C^1 . Dann gilt die Produktregel:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$$

3.) Ist ω von der Klasse C^2 , so gilt die **Poincaré-Identität**:

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

BEWEIS 1.) Nachrechnen

2.) Sei $\omega_1 = a(x)dx_I$, $\omega_2 = b(x)dx_J$, also $\omega_1 \wedge \omega_2 = (a(x)b(x))dx_I \wedge dx_J$, mit $I \in \mathcal{G}^{(k)}$ und $J \in \mathcal{G}^{(l)}$.

3.) Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(a(x)b(x)) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i}(a \cdot b)) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i}(a) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + a \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i}(b)) \underbrace{dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J}_{=(-1)^k dx_I \wedge dx_J}) \\ &\stackrel{\text{Def. } \wedge\text{-Produkt}}{=} \left(\sum_{i=1}^n (\delta_{x_i}(b)) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \right) \wedge dx_I + (-1)^k a dx_I \wedge \left(\sum_{i=1}^n (\delta_{x_i}(a)) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \right) \wedge dx_I \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 \end{aligned}$$

4.) a.) Fall: $\omega = f \in C^2(O \rightarrow \mathbb{R})$ ist 0-Form. Dann folgt $d\omega = \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} f) dx_i$

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i=1}^n (\delta_{x_i} f) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\delta_{x_j} (\delta_{x_i} f)}_{=\delta_{x_i} (\delta_{x_j} f)} dx_j \wedge dx_i = 0 \end{aligned}$$

Hierbei kommt jeder Summand ein Mal plus und ein Mal minus vor. Beachte, dass

$$dx_j \wedge dx_i = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i = j \\ -dx_i \wedge dx_j & , \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

b.) Fall: O.B.d.A. $\omega = a_j dx_j$, $J \in \mathcal{G}^{(k)} \implies \omega = a_j \wedge dx_j$ dann folgt mit der Produktregel

$$d\omega = da_j \wedge dx_j + (-1)^0 a_j \underbrace{d(dx_j)}_{=0}$$

7.)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right| &\leq \underbrace{\left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} (f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z - z_0)}_{\text{Besitzt Stammfunktion}}) dz \right|}_{=0 \text{ da } \varphi \circ \gamma_n \text{ geschlossen}} + \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} r(z, z_0) dz \right| \\ &\leq L(\varphi \circ \gamma_n) \max_{z \in \text{Bild}(\varphi \circ \gamma_n)} |r(z, z_0)| \\ &\leq \int |(\varphi \circ \gamma_n)'(t)| dt \max_{z \in \text{Bild}(\varphi \circ \gamma_n)} |r(z, z_0)| \\ &\leq \int |\varphi'(\gamma_n(t))| |\gamma_n'(t)| dt \max_{z \in \text{Bild}(\varphi \circ \gamma_n)} |r(z, z_0)| \\ &\leq c \cdot L(\gamma_n) \max_{z \in \text{Bild}(\varphi \circ \gamma_n)} |r(z, z_0)| \\ &\leq \frac{c}{2^n} L(Y_0) \max_{z \in \text{Bild}(\varphi \circ \gamma_n)} |r(z, z_0)| \\ &\stackrel{6.}{\leq} \frac{c}{2^n} L(Y_0) \frac{\varepsilon}{2^n} L(Y_0) \\ &\stackrel{3.}{\implies} \left| \int_{\varphi \circ \gamma_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right| \leq c \varepsilon L(Y_0)^2 \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \\ &\implies \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

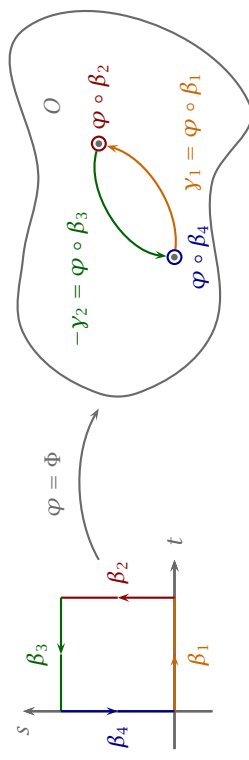
2.5 **Folgerung** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ in O . Dann

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

BEWEIS Sei Φ die Homotopie, insbesondere

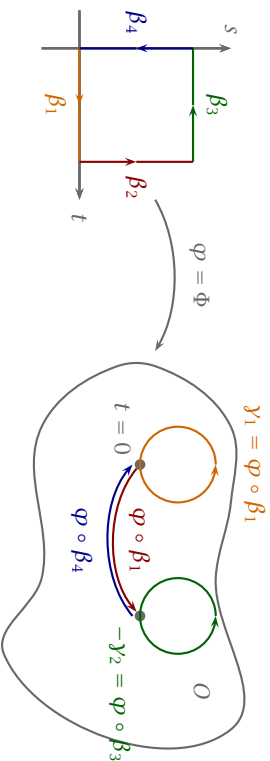
$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= \gamma_1(t), \quad \Phi(t, 1) = \gamma_2(t) \\ \Phi &\in C^1([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow O) \end{aligned}$$

Setze zur Anwendung von 2.4 $R = [0, 1] \times [0, 1]$, $\varphi = \Phi$.
Fall 1: $\Phi(0, 1) = \Phi(0, 0)$ für $0 \leq s \leq 1$ und $\Phi(1, s) = \Phi(1, 0)$



$$\begin{aligned} &\stackrel{2.4}{=} \int_{\varphi \circ \beta_1 = \gamma_1} f(z) dz + \underbrace{\int_{\varphi \circ \beta_2} f(z) dz}_{=0, \text{ da } \varphi \circ \beta_2 = \text{const.}} + \underbrace{\int_{\varphi \circ \beta_3 = -\gamma_2} f(z) dz}_{=-\int_{\gamma_2} f(z) dz} + \underbrace{\int_{\varphi \circ \beta_4} f(z) dz}_{=0, \text{ da } \varphi \circ \beta_4 = \text{const.}} \\ &\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

Fall 2: $\Phi(0, s) = \Phi(1, s)$ für $0 \leq s \leq t$



$$\begin{aligned} &\stackrel{2.4}{=} \int_{\varphi \circ \beta_1 = \gamma_1} f(z) dz + \int_{\varphi \circ \beta_2} f(z) dz + \underbrace{\int_{\varphi \circ \beta_3 = -\gamma_2} f(z) dz}_{=-\int_{\gamma_2} f(z) dz} + \int_{\varphi \circ \beta_4 = -\varphi \circ \beta_2} f(z) dz = 0 \\ &\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

TEILBEWEIS 2.2 i. \Rightarrow ii.: f differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig, benutze 2.5

ii. \Rightarrow iii.: γ nullhomotop $\Rightarrow \gamma \sim \tilde{\gamma}$, da $\tilde{\gamma} = \text{const.}$, und aus 2.5 folgt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0, \quad \text{da } \tilde{\gamma} = \text{const. (Integral über Punkt ist 0)} \quad \blacksquare$$

2.6 Cauchy-Integralformel für die Kreisscheibe Kreisscheibe: Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$, $r > 0$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$. Dann gilt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz, \quad \text{für } |w-z_0| < r$$

Vererbbarkeit: Das Integral ist zu verstehen längs der Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow O: t \mapsto z_0 + r e^{i2\pi t}$.

Insbesondere: Ist $f(z)$ auf dem Kreisrand bekannt, dann auch im Kreisinneren.

8.4 \blacktriangleright **Beispiel** 1.) Sei $O = \mathbb{R}^n$, $\omega = f \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$, dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f) dx_i$$

Sei $S = \phi([a, b])$ eine 1-dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit (vergleiche 6.-7.), dann ist

$$\begin{aligned} d\omega(S) &= \int_{\gamma \in [a, b]} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f)(\phi(\gamma)) \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \gamma} \right) \right) d\gamma \\ &= \underbrace{\int_{\gamma \in [a, b]} \frac{d(f \circ \phi)}{d\gamma}}_{= f(\phi(b)) - f(\phi(a))} \end{aligned}$$

und für den Rand, also der 0-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\tilde{S} = \{\phi(a), \phi(b)\}$

$$\omega(\tilde{S}) = f(\phi(a)) + f(\phi(b))$$

2.) Sei $O = \mathbb{R}^3$, $V \in C^1(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ und

$$\begin{aligned} \omega &= V_1 dx_2 \wedge dx_3 + V_2 dx_3 \wedge dx_1 + V_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= V_1 dx_2 \wedge dx_3 - V_2 dx_3 \wedge dx_1 - V_3 dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Aus 7.5 wissen wir

$$\omega(S) = \int_S \langle V, n_0 \rangle dV^{(2)}$$

also

$$\begin{aligned} d\omega &= dV_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - V_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + dV_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\partial_{x_1} V_1) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - (\partial_{x_2} V_2) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + (\partial_{x_3} V_3) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \underbrace{(\partial_{x_1} V_1 + \partial_{x_2} V_2 + \partial_{x_3} V_3)}_{=dV} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Für eine 3-dimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit $S = \overline{\phi(K_1^{(3)}(0))}$

$$\begin{aligned} d\omega(S) &= \int_S d\omega = \int_{K_1^{(3)}(0)} \text{div} V(\phi(\gamma)) \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \gamma} \right) d\gamma \\ &= \pm \int_{S=\phi(K_1^{(3)}(0))} \text{div} V(x) dx \end{aligned}$$

8.5 **Satz 1.)**

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

$$d(c\omega) = cd\omega$$

2.8 Rechnen mit Differentialformen

8.1 **Multiplikation** 1.) Sind $k, l \geq 1$ und $k + l \leq n$ und

$$\omega_1 = \sum_{j \in G^{(k)}} a_j dx_j, \quad \omega_2 = \sum_{j \in G^{(l)}} b_j dx_j$$

so ist

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{j \in G^{(k)}} \sum_{j \in G^{(l)}} (a_j b_j) \underbrace{dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k+l}}}_{dx_j \wedge dx_j}$$

eine $k+l$ -Form, das **Produkt** von ω_1 und ω_2 .

2.) Im Fall $k = 0$, $\omega_1 = f$ definieren wir

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{j \in G^{(l)}} (f \cdot b_j) dx_j$$

×

8.2 **Satz** Es gelten Distributiv- und Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3 \\ \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3 \\ \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) &= (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 \end{aligned}$$

×

8.3 **Differentiation** 1.) Falls $\omega = f$ eine 0-Form der Klasse C^1 in O_y ist, dann heißt die 1-Form

$$d\omega = df = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f) dx_i$$

heißt **Ableitung** von ω .

2.) Falls $k \geq 1$ und $\omega = \sum_{j \in G^{(k)}} a_j dx_j$ eine k -Form der Klasse C^1 ist, heißt die $(k+1)$ -Form

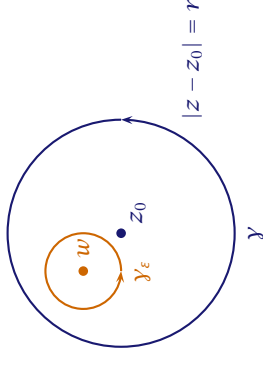
$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j \in G^{(k)}} da_j \wedge dx_j \\ &= \sum_{j \in G^{(k)}} \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} a_j) dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

heißt **Ableitung** von ω .

Insbesondere ist also für eine k -Form ω der Klasse C^m die Ableitung $d\omega$ eine $(k+1)$ -Form der Klasse C^{m-1} .

×

BEWEIS $\gamma_\varepsilon(t) := w + \varepsilon e^{2\pi i t}, 0 \leq t \leq 1$



Offensichtlich: $\gamma \sim \gamma_\varepsilon$ in $O \setminus \{w\}$ und $f(z)/(z-w)$ ist differenzierbar in $O \setminus \{w\}$.

$$\begin{aligned} \stackrel{2.4}{\implies} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &= \int_{\gamma_\varepsilon} \underbrace{\frac{f(z) - f(w)}{z-w}}_{\substack{|\cdot| \leq \varepsilon, \text{ weil diffbar} \\ |\cdot| \leq c L(\gamma_\varepsilon) = c 2\pi \varepsilon \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } \varepsilon \rightarrow 0}} dz + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w} dz}_{=2\pi i} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\implies} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i f(w)$$

■

2.7 **Potenzreihenentwicklungssatz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$, $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$. Dann gibt es eine Folge $(a_n) \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{f\u00fcr } |z - z_0| < r$$

BEWEIS Sei $w \in K_r(z_0)$

$$\begin{aligned} f(w) &\stackrel{2.6}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0-w} \frac{1}{z-z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n dz \end{aligned}$$

Bemerkung: Die geometrische Reihe konvergiert, weil $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{|w-z_0|}{r} < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w-z_0|}{r} \right)^n \text{ konvergent}$$

Weierstra\u00df $\implies_{1.15}$ Reihe gleichm\u00e4\u00dfig konvergent bez\u00fcglich z

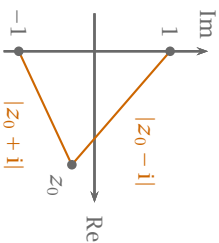
Reihe und Integral vertauschen

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (w-z_0)^n$$

2.8 **Folgerung** Unter diesen Voraussetzungen gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$R \geq \sup\{r > 0 : \overline{K_r(z_0)} \subseteq O\}$$

2.9 **Beispiel** $O = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$



Entwickle f um z_0 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Aus 2.8 folgt $R \geq \min\{|z_0+i|, |z_0-i|\}$

Da $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow \pm i$ kann die Potenzreihe in $z = \pm i$ nicht konvergieren.

$$\Rightarrow R = \min\{|z_0+i|, |z_0-i|\}$$

2.10 **Folgerung 1.)**

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \text{ für die } a_n \text{ in 2.7}$$

$$2.) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \xrightarrow{\text{Übung}} a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Auf einer Kreisscheibe um z_0 gilt analog zur gewöhnlichen Cauchy-Integralformel (2.6) sogar allgemeiner:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \quad |w-z_0| < r$$

(Verwende dazu $z_0 := w$ und $r := |w-z_0|$, sowie die Weghomotopie beider Kurven auf der Kreisscheibe) Man nennt diese Form auch **Erweiterte Cauchy'sche Integralformel**.

BEWEIS 1.) Anm: $\omega = 0$, aber $a_{i_0} \neq 0$ für mindestens ein $I_0 \in \mathcal{G}^{(k)}$. Sei $x_0 \in O$ mit $a_{i_0}(x_0) \neq 0$, o.B.d.A. $a_{i_0}(x_0) > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit

$$a_{i_0}(x) \geq \frac{1}{2} a_{i_0}(x_0) > 0 \text{ für } x \in K_\delta(x_0), \overline{K_\delta(x_0)} \subseteq O$$

Wähle $D = \overline{K_\delta^{(k)}}(0)$.

$$\varphi(\gamma) = x_0 + \delta \sum_{k=1}^k \gamma^k e_{j_k}$$

wobei $I_0 = \{j_1, \dots, j_k\}$ und $e_{j_k} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$. Dann ist $\varphi(D)$ eine kompakte orientierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit, $\dim k$

$$\Rightarrow \omega(\varphi(D)) \stackrel{6.7}{=} \int_D \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I(\varphi(\gamma)) \det \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial \gamma} \right) d\gamma$$

Sei $I \in \mathcal{G}^{(k)}$, $I \neq I_0$, $I = (i_1, \dots, i_k)$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial \gamma} \right) = \det \left(\frac{\partial (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial \gamma} \right)$$

$$\varphi(\gamma) = x_0 + \delta(\gamma^1 e_{j_1} + \gamma^2 e_{j_2} + \dots + \gamma^k e_{j_k})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma^{\ell}} = \delta e_{j_\ell}, \text{ insbesondere } \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma^{\ell}} = \begin{cases} \delta & \ell = j_\ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \partial_{\gamma^1} \varphi_{i_1} & \dots & \partial_{\gamma^k} \varphi_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{\gamma^1} \varphi_{i_k} & \dots & \partial_{\gamma^k} \varphi_{i_k} \end{pmatrix} = 0$$

Außerdem

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_{I_0}}{\partial \gamma} \right) = \det \begin{pmatrix} \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \delta \end{pmatrix} = \delta^n$$

$$\Rightarrow \omega(\varphi(D)) = 0 + \dots + 0 + \int_D a_{i_0}(\varphi(\gamma)) \cdot \delta^n d\gamma \geq \frac{1}{2} a_{i_0}(x_0) \delta^n \int_D 1 d\gamma > 0$$

$\nexists \omega(S) = 0$ für alle S .

2.) Die Eindeutigkeit folgt aus 1.). Existenz: Forme alle Summanden $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_k} = (-1) dx_1, I \in \mathcal{G}^{(k)}$ um und fasse gleiche dx_i zusammen. ■

1.) Falls $\omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ und $i_j = i_\ell$ für ein Paar (j, ℓ) mit $j \neq \ell$. Dann ist $\omega = 0$. Insbesondere $dx_i \wedge dx_i = 0$.

2.)

$$\begin{aligned} & dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= - dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell} \wedge \dots \wedge dx_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

BEWEIS 1.) Sieht man direkt aus $\det\left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial y}\right) = 0$

wobei die Spalten i_j und i_ℓ gleich sind.

2.) Folgt aus: Vertauscht man in der Matrix A zwei Spalten, so wird $\det A$ mit -1 multipliziert. ■

7.8 **Lineare Struktur:** Für k -Formen ω_1, ω_2 und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2)(S) &= \int_S (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) \\ &= c_1 \int_S \omega_1 + c_2 \int_S \omega_2 = c_1 \omega_1(S) + c_2 \omega_2(S) \end{aligned}$$

7.9 ▶ **Beispiel** $\omega = 1 \cdot dx_1 \wedge dx_2 + 1 \cdot dx_2 \wedge dx_1 \implies \omega = 0$. ◀

7.10 **Definition** Es sei $I = (i_1, \dots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Dann heißt I **wachsender Index**. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{I : I \text{ wachsender Index der Länge } k\} \\ dx_I &:= dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \text{ mit } I = (i_1, \dots, i_k) \\ dx_I \text{ mit } I \in \mathcal{G}^{(k)} &\text{ heißt } k\text{-Grundform im } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

7.11 **Satz** 1.) Ist

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I(x) dx_I = 0$$

so folgt $a_I = 0$ für $I \in \mathcal{G}^{(k)}$.

2.) Jede k -Form ω in O besitzt eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{G}^{(k)}} a_I dx_I$$

d.h. $(a_I : I \in \mathcal{G}^{(k)})$ sind die $\binom{n}{k}$ Koordinaten von ω . Die Abbildung

$$\omega \mapsto (a_I : I \in \mathcal{G}^{(k)}) \text{ mit } \omega = \sum a_I dx_I$$

ist bijektiv und linear.

2.11 **Definition** Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, so heißt f **ganze Funktion**. Dann gilt mit beliebigem $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit Konvergenzradius $R = \infty$, a_n gegeben durch 2.10

2.12 ▶ **Beispiel** $e^{(\cdot)}$, Polynomfunktionen, sin, cos sind ganz. ◀

TEILBEWEIS 2.2 i. \implies iv.

$$\begin{aligned} & z_0 \in O, \quad O \text{ offen} \\ \implies \exists r > 0 : & K_r(z_0) \subseteq O \\ \implies \overline{K_{r/2}(z_0)} & \subseteq K_r(z_0) \subseteq O \\ \stackrel{2.7}{\implies} \text{iv. mit } & R \geq \frac{r}{2} \end{aligned}$$

iv. \implies v.: 1.36

v. \implies i.: offensichtlich

2.13 **Cauchy-Abschätzung für Taylor-Koeffizienten** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $K_r(z_0) \subseteq O$, $|f(z)| \leq M$ auf $|z - z_0| = r$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ für } |z - z_0| < r$$

Dann

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = |a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

BEWEIS

$$|a_n| \stackrel{2.10}{=} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right|$$

$$\stackrel{1.33}{\leq} \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \underbrace{L(|z-z_0|=r)}_{2\pi r}$$

$$= \frac{M}{r^n}$$

2.14 **Satz von Liouville** Jede ganze Funktion, die beschränkt ist, ist konstant.

BEWEIS Aus 2.11

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Aus 2.13

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \text{ wobei } |f(z)| \leq M, \quad \overline{K_r(0)} \subseteq \mathbb{C}$$

Dann folgt mit $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= 0, \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \\ \Rightarrow f(z) &= a_0 + 0, \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

2.15 **Riemannscher Hebbarkeitssatz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in O$, $f : O \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, und

$$\exists r > 0 \exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \quad \text{für } 0 < |z - z_0| < r$$

Dann kann f in $z = z_0$ holomorph ergänzt werden, d.h. es existiert $a \in \mathbb{C}$, so dass

$$\tilde{f} : O \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} a & z = z_0 \\ f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

differenzierbar ist.

BEWEIS Setze

$$g(z) := \begin{cases} 0 & z = z_0 \\ (z - z_0)^2 f(z) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist g in $O \setminus \{z_0\}$ differenzierbar und auch in z_0

$$\begin{aligned} &\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \underbrace{(z - z_0)^2 f(z)}_{\text{beschränkt}} = 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Beschränkte Folge mal Nullfolge ergibt Nullfolge

$$\begin{aligned} \Rightarrow g \text{ differenzierbar in } O, \quad g(z_0) &= g'(z_0) = 0 \\ \stackrel{2.2.1. \Leftrightarrow \text{iv.}}{\Rightarrow} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| \leq r \end{aligned}$$

wobei n_0 der Normaleneinheitsvektor ist.

$$= \sum_{j=1}^N \int_{\substack{\gamma \in K_1^{(2)}(0) \\ \forall \gamma \in K_1^{(2)+}(0)}} \psi_j(\varphi_j(\gamma)) \left(V_1(\varphi_j(\gamma)) \cdot \det \left(\frac{\partial(\varphi_{j_2}, \varphi_{j_3})}{\partial \gamma} \right) \right)$$

$$+ V_2(\varphi_j(\gamma)) \cdot \det \left(\frac{\partial(\varphi_{j_3}, \varphi_{j_1})}{\partial \gamma} \right) + V_3(\varphi_j(\gamma)) \cdot \det \left(\frac{\partial(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2})}{\partial \gamma} \right) d\gamma$$

7.4 **Definition** Sie $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Differentialform** in O oder **k-Form** in O ist eine Abbildung

$$\omega : \left\{ \begin{array}{l} k\text{-dim. kompakten orientierbaren} \\ C^1\text{-Mannigfaltigkeiten in } O \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

symbolisch gegeben durch

$$\omega = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$a_{i_1, \dots, i_k} \in C(S \rightarrow \mathbb{R})$ mit

$$\omega(S) := \int_S \omega = \sum_{j=1}^N \int_{D_j} \left(\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n (\psi_j \cdot a_{i_1, \dots, i_k})(\varphi_j(\gamma)) \right) \cdot \det \left(\frac{\partial(\varphi_{j i_1}, \dots, \varphi_{j i_k})}{\partial \gamma} \right) d\gamma$$

$D_j = K_1^{(k)}(0)$ oder $\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1} \\ \vdots \\ \varphi_{j_k} \end{pmatrix}$. Eine 0-Form in O ist gegeben durch $a \in C(O \rightarrow \mathbb{R})$ und

$$\omega(S) := \sum_{j=1}^N a(x_j) = \int_S \omega$$

ω ist von der Klasse C^m , falls $a_{i_1, \dots, i_k} \in C^m(O \rightarrow \mathbb{R})$. Das bedeutet, ω ist durch Vorgabe der a_{i_1, \dots, i_k} definiert. ✕

7.5 **Bemerkung:** Die Definition von $\int_S \omega$ ist unabhängig vom Atlas und der Zerlegung der Eins, falls der neue Atlas gleich orientiert wie der ursprüngliche ist. ↔

7.6 **Beispiel** Sei $m = 3$, $k = 2$, $O \subseteq \mathbb{R}^3$, $V \in C(O \rightarrow \mathbb{R}^3)$.

$$\omega := V_1 dx_2 \wedge dx_3 + V_2 dx_3 \wedge dx_1 + V_3 dx_1 \wedge dx_2 \Rightarrow \omega(S) = \text{Fluss von } V \text{ durch } S$$

7.7 **Eigenschaften:** Sei $k \geq 2$.

= Definition des Integrals $\int_S f \, dV^{(k)}$ mit Hilfe des Atlas $\tilde{A}(S)$.

6.7 **▶ Beispiel** Sei $D = K_{\epsilon}^{(k)}(0)$, $\varphi \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$ bijektiv, φ^{-1} stetig, $\text{Rang}(\partial_y \varphi) = k$, $S := \varphi(D)$. Dann ist S kompakte k -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit. Für $f \in C(S \rightarrow \mathbb{R})$ gilt

$$\int_S f \, dV^{(k)} = \int_D f(\varphi(y)) \left[\det \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) \right]^{1/2} dy \quad \blacktriangleleft$$

2.7 Differentialformen

7.1 **Vereinbarung** Im Folgenden immer: S ist eine kompakte orientierbare k -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $A(S) = \{(\varphi_j, U_j), 1 \leq j \leq N\}$ und passender Zerlegung der Eins $\{ \psi_1, \dots, \psi_N \}$. \times

7.2 **Arbeit** Sei $n = 3$, $k = 1$, $F \in C(S \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Die **Arbeit** längs S im Kraftfeld F ist gegeben durch

$$\begin{aligned} A &:= \int_S \langle F, t_0 \rangle \, dV^{(1)} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \psi_j \langle F, t_0 \rangle \, dV^{(1)} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\substack{y \in]-1,1[\\ \forall y \in]-1,0[\\ \forall y \in]0,1[}} \psi_j(\varphi_j(y)) \left\langle F(\varphi_j(y)), \frac{\varphi_j'(y)}{\|\varphi_j'(y)\|} \right\rangle \left[\det \left((\varphi_j'(y))^* (\varphi_j'(y)) \right) \right]^{1/2} dy \\ &= \sum_{j=1}^N \int \psi_j(\varphi_j(y)) \left(\sum_{k=1}^3 F_k(\varphi_j(y)) \varphi_{jk}'(y) \right) dy \quad \times \end{aligned}$$

7.3 **Fluss** Sei $n = 3$, $k = 2$, $V \in C(S \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Der **Fluss** von V durch S ist definiert durch

$$F := \int_S \langle V, n_0 \rangle \, dV^{(k)}$$

weil $a_0 = g(z_0) = 0$ und $a_1 = g'(z_0) = 0$, folgt

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}, \quad \text{für } 0 < |z - z_0| < r$$

Setze $a := a_2$ für Definition von \tilde{f}

$$\Rightarrow \tilde{f}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}, \quad |z - z_0| < r$$

also differenzierbar in O . \blacksquare

2.16 **▶ Beispiel** $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $z_0 \in O$

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{sonst} \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

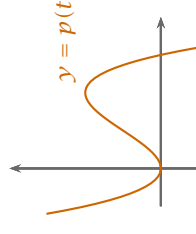
Somit ist g holomorph auf O . \blacktriangleleft

2.17 **Hilfssatz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ erfülle iii. aus 2.2. Dann: Ist $D \subseteq O$ eine abgeschlossene Dreiecksfläche mit geschlossener Randkurve ∂D (stückweise Intervalle), so gilt

$$\int_{\partial D} f(z) \, dz = 0$$

BEWEIS Hauptidee: ∂D umparametrisieren zu einer C^1 -Kurve

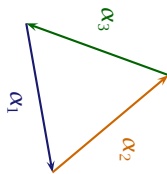
$$p(t) := 3t^2 - 2t^3$$



$$\Rightarrow \begin{cases} p(0) = 0, & p(1) = 1 \\ p'(t) > 0, & \text{für } 0 < t < 1 \\ p'(0) = 0, & p'(1) = 0 \end{cases}$$

Sei $\partial D : [0, 3] \rightarrow O$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha_2(t) & 1 \leq t \leq 2 \\ \alpha_3(t) & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$



Sei $\beta_1(t) = \alpha_1(p(3t))$, $0 \leq t \leq 1/3$

$$\Rightarrow \int_{\beta_1} f(z) dz \stackrel{1.28}{=} \int_{\alpha_1} f(z) dz, \quad \beta_1(0) = 0, \beta_1\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Genauso

$$\beta_2(t) = \alpha_2\left(1 + p\left(3\left(t - \frac{1}{3}\right)\right)\right), \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \beta_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \beta_2\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\beta_3(t) = \alpha_3\left(2 + p\left(3\left(t - \frac{2}{3}\right)\right)\right), \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1$$

Setze

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \beta_1(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \beta_2(t) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \beta_3(t) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{\gamma} \in C^1([0, 1] \rightarrow \mathbb{C})$ ist Randkurve von D

Dann ist $\tilde{\gamma}$ nullhomotop:

$$\begin{aligned} \Phi(t, s) &:= \underbrace{(1-s)\tilde{\gamma}(t) + s\tilde{\gamma}(0)}_{\in D \subseteq O \text{ da } D \text{ konvex}}, \quad \Phi \in C^1 \\ &\Rightarrow \tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}(0), \text{ also } C^1\text{-nullhomotop} \\ &\stackrel{\text{iii. von 2.12}}{\Rightarrow} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

■

2.18 Satz von Morera Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und für jede abgeschlossene Dreiecksfläche $D \subseteq O$ gelte

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

Dann ist f holomorph auf O .

BEWEIS Sei $\tilde{A}(S) = \{(\tilde{\varphi}_j, \tilde{U}_j) : j = 1, \dots, M\}$ weiterer Atlas und $\{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_M\}$ entsprechende Zerlegung der Eins. Dann

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \int_{\tilde{U}_j} \psi_j \cdot f \, dV^{(k)} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \int_{\tilde{\varphi}_{\ell}^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell)} \tilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f \, dV^{(k)} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \int_{\tilde{\varphi}_{\ell}^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell)} (\tilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f) (\varphi(\gamma)) \left[\det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \right) \right]^{1/2} dV^{(k)} \end{aligned}$$

Sei j, ℓ mit $U_j \cap \tilde{U}_\ell \neq \emptyset$, $\Phi_{\ell j} = \tilde{\varphi}_\ell \circ \varphi_j \circ \varphi_j^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell) \rightarrow \varphi_\ell^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell)$ und $\Phi_{\ell j}^{-1} = \varphi_j^{-1} \circ \tilde{\varphi}_\ell$. Seien nun $z = \Phi_{\ell j}(\gamma)$ und $\gamma = \Phi_{\ell j}^{-1}(z)$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \int_{\gamma \in \varphi_{\ell}^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell)} (\tilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f) \underbrace{(\varphi(\Phi_{\ell j}^{-1}(z)))}_{\tilde{\varphi}_\ell(z)} \\ &\quad \left[\det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (\Phi_{\ell j}^{-1}(z)) \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (\dots) \right) \right) \right]^{1/2} \left| \det \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}^{-1}}{\partial z} \right) \right| dz \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\varphi_j = \tilde{\varphi}_\ell \circ \Phi_{\ell j}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (\gamma) \right) = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_\ell}{\partial z} (\Phi_{\ell j}(\gamma)) \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y} (\gamma) \right) \\ &\Rightarrow \det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} (\Phi_{\ell j}^{-1}(z)) \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial z} (\dots) \right) \right) \\ &= \det \left(\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y} (\Phi_{\ell j}^{-1}(z)) \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_\ell}{\partial z} (z) \right) \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y} (z) \right) \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y} (\Phi_{\ell j}^{-1}(z)) \right) \right) \\ &= \det \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_\ell}{\partial z} (z) \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial z} (z) \right) \right) \det \left(\left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}}{\partial y} (\Phi_{\ell j}^{-1}(z)) \right) \right)^2 \\ &= \sum \sum \int_{z \in \varphi_{\ell}^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell)} (\tilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f) (z) \left[\det \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_\ell}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_\ell}{\partial y} \right) \right) \right]^{1/2} \\ &\quad \left| \det \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}^{-1}}{\partial y} (\Phi_{\ell j}^{-1}(z)) \right) \right| \left| \det \left(\frac{\partial \Phi_{\ell j}^{-1}}{\partial z} (z) \right) \right| dz \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \int_{\tilde{\varphi}_{\ell}^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_\ell)} \tilde{\psi}_\ell \cdot \psi_j \cdot f \, dV^{(k)} \\ &= \sum_{\ell=1}^M \int_{\tilde{U}_\ell} \tilde{\psi}_\ell \cdot f \, dV^{(k)} \end{aligned}$$

3.) $k = 1$:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(v) &= (\det(v^* \cdot v))^{1/2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \|v\| \end{aligned}$$

4.) $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear abhängig $\implies \text{Rang}(v_1, \dots, v_k) < k$.

$$\implies V^{(k)}(v_1, \dots, v_k) = 0$$

5.) Sei S eine C^1 -Mannigfaltigkeit, (φ, U) eine Karte, $x_0 \in U$, $\gamma_0 = \varphi^{-1}(x_0)$,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right)$$

Dann ist

$$\left[\det \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) \right]^{1/2}$$

der k -Inhalt der Parallelepipeds, das von den Tangentialvektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}$ aufgespannt wird. \rightarrow

6.3 **Definition** Eine Mannigfaltigkeit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt** wenn sie als Teilmenge des \mathbb{R}^n kompakt ist. \times

6.4 **Beispiel** 1.) $S := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1 \wedge x_{k+2} = \dots = x_k = 0\}$ ist kompakt, k -dimensional, $\partial S \neq \emptyset$.

2.) $S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ nicht kompakt, $\partial S = \emptyset$.

3.) $S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \wedge x_n \leq 0\}$ kompakt. $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 \wedge x_n = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \wedge x_n < 0\}$. \blacktriangleleft

6.5 **Definition** Sei S kompakte, k -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit mit Atlas $A(S) = \{(\varphi_j, U_j) : j = 1, \dots, N\}$. Seien $O_1, \dots, O_N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $U_j = O_j \cap S$, $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ Zerlegung der Eins auf S bezüglich $\{O_1, \dots, O_N\}$. Für $f \in C(S \rightarrow \mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} \int_S f \, dV^{(k)} &= \sum_{j=1}^N \int_{U_j} \underbrace{\psi_j \cdot f}_{\text{supp}(\psi_j \cdot f) \subseteq U_j} \, dV^{(k)} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{y \in K_1^{(k)}(0)} (\psi_j \cdot f)(\varphi_j(y)) \left[\det \left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)^* \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \right) \right]^{1/2} dy \end{aligned}$$

(oder auch Integral über $y \in K_1^{(k)+}(0)$) \times

6.6 **Satz** Die Definition $\int_S f \, dV^{(k)}$ ist unabhängig von der Wahl des Atlas, der O_j und der Zerlegung der Eins.

BEWEIS Idee: Zeige, dass f in einem Kreis $K_r(z_0)$ mit $\overline{K_r(z_0)} \subseteq O$ eine Stammfunktion F besitzt. Wähle $z_0 \in O$ und $K_r(z_0)$.

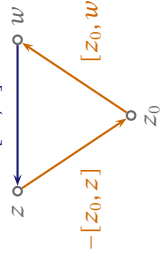
Setze

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) \, d\zeta, \quad \text{für } z \in K_r(z_0)$$

Behauptung: $F' = f$ in $K_r(z_0)$. Sei $z \in K_r(z_0)$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{w - z} \left(\int_{[z_0, w]} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{[z, w]} f(\zeta) \, d\zeta \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{[w, z]} f(\zeta) \, d\zeta + \int_{[z, w]} f(\zeta) \, d\zeta \right| \end{aligned}$$

1 Es gilt anschaulich $\int_{[z_0, w]} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) \, d\zeta + \int_{[w, z]} f(\zeta) \, d\zeta = 0$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{[z, w]} (f(\zeta) - f(z)) \, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|w - z|} \underbrace{\max_{\zeta \in [z, w]} |f(\zeta) - f(z)|}_{< \varepsilon \text{ für } |w - z| < \delta, \text{ da } f \text{ stetig}} \underbrace{L([z, w])}_{= |w - z|} \\ &< \varepsilon, \quad \text{für } |w - z| < \delta \end{aligned}$$

Damit gilt $F' = f$. F ist demnach differenzierbar auf $K_r(z_0)$, also nach 2.2 beliebig oft differenzierbar. Also ist auch f (beliebig oft) differenzierbar auf $K_r(z_0)$. Da $z_0 \in O$ beliebig gewählt war, ist f auf ganz O differenzierbar und damit holomorph. \blacksquare

TEILBEWEIS 2.2 iii. $\stackrel{2.17}{\implies}$ Voraussetzung von Morera erfüllt.

Morera \implies i. f differenzierbar in O . \blacksquare

2.19 **Bemerkung:** 1.) Beweis von Morera zeigt

f differenzierbar $\iff f$ besitzt eine lokale Stammfunktion
 $\forall z_0 \in O \exists r > 0 \exists F : F' = f$ in $K_r(z_0)$

2.) Wenn f differenzierbar in O ist, muss f nicht unbedingt eine globale Stammfunktion (Stammfunktion auf O) besitzen: Z.B. $O = K_1(0) \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$.

Später: Stammfunktionen können holomorph fortgesetzt werden. Z.B. In z als Stammfunktion von $1/z$. ↪

2.20 **Satz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in O$

$$\tilde{O} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in O\}$$

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$$

$$v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Es sind äquivalent

i.) f ist differenzierbar in z_0 .

ii.) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in (x_0, y_0) und es gelten die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Sind die Bedingungen erfüllt, so gilt

$$u_x(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -\operatorname{Im} f'(z_0).$$

BEWEIS

$$\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0) + \operatorname{Re} f'(z_0) \operatorname{Re}(z - z_0) - \operatorname{Im} f'(z_0) \operatorname{Im}(z - z_0) \\ \quad + o(|z - z_0|) \\ \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0) + \operatorname{Im} f'(z_0) \operatorname{Re}(z - z_0) - \operatorname{Re} f'(z_0) \operatorname{Im}(z - z_0) \\ \quad + o(|z - z_0|) \end{cases}$$

Sei $z = x + iy$, dann zerfallen

$$\operatorname{Re}(z - z_0) = x - x_0$$

$$\operatorname{Im}(z - z_0) = y - y_0$$

Nach Schritt 1 ist $\{\psi_{jk} : k = 1, \dots, N_j\}$ eine Zerlegung der Eins auf $M_j \setminus \operatorname{int}(M_{j-1})$.
Definiere

$$\sigma(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_j} \psi_{jk}(x).$$

Nach Konstruktion gilt: Zu jedem $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U(x)$, sodass die Summe $U(x)$ endlich ist ($x \notin M \Rightarrow \psi_{jk}(x) = 0$).

$$\Rightarrow \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$$

Außerdem $\sigma(x) \geq 1$ für $x \in M$.

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sigma} \psi_{jk} : j \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq N_j \right\}$$

ist die Zerlegung der Eins auf M .

Fall 3:

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$M \subseteq O := \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$$

mit $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ überdeckt O . Wende Fall 2 an. ■

2.6 Integration auf Mannigfaltigkeiten

6.1 **Definition** Sei $1 \leq k \leq n$ und $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist der **k -Inhalt** aufgespannten Parallelepipeds definiert durch

$$V^{(k)}(v_1, \dots, v_k) := \left(\det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix}^*}_{k \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix}}_{n \times k} \right) \right)^{1/2}$$

6.2 **Bemerkung:** 1.) Sei $B := (v_1, \dots, v_k)$.

$B^* B$ symmetrisch $\Rightarrow \det(B^* B) = \text{Produkt der Eigenwerte } \lambda_1, \dots, \lambda_k$

Für $x \in \mathbb{R}^k$: $\langle B^* Bx, x \rangle_{\mathbb{R}^k} = \langle Bx, Bx \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$.

$\Rightarrow \lambda_j \geq 0$ (x ist Eigenvektor: $0 \leq \langle B^* Bx, x \rangle = \lambda(x, x)$).

2.) $k = n$: (Es gilt $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ und für A hermitesch $\det A^* = \det A$)

$$\begin{aligned} V^{(n)}(v_1, \dots, v_n) &= (\det((v_1, \dots, v_n)^* \cdot (v_1, \dots, v_n)))^{1/2} \\ &= |\det(v_1, \dots, v_n)| \end{aligned}$$

BEWEIS VON 5.2 Fall i:

M ist kompakt.

$$\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A : M \subseteq \bigcup_{j=1}^N O_{\alpha_j}$$

Wähle $O'_{\alpha_j} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, O'_{α_j} beschränkt, $\overline{O'_{\alpha_j}} \subseteq O_{\alpha_j}$ mit $M \subseteq \bigcup_{j=1}^N O_{\alpha_j}$ (5.7). $\overline{O'_{\alpha_j}}$ beschränkt und abgeschlossen $\stackrel{\text{Borel}}{\implies}$ kompakt.

$$\implies \varphi_{\alpha_j} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) \text{ mit } \varphi_{\alpha_j}(x) = 1 \text{ für } x \in \overline{O'_{\alpha_j}}, \text{supp } \varphi_{\alpha_j} \subseteq O_{\alpha_j}, \varphi_{\alpha_j} \geq 0.$$

Setze

$$\tilde{\psi}_j(x) := \frac{\varphi_{\alpha_j}(x)}{\sum_{k=1}^N \varphi_{\alpha_k}(x)}$$

\implies i.,ii.,iii.,iv.,v. erfüllt. Es fehlt $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$.

5.5 \implies Es existiert $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ mit $\varphi = 1$ auf M_N und $\text{supp } \varphi \subseteq \bigcup_{j=1}^N O'_{\alpha_j}$. Setze

$$\psi_j(x) := \varphi(x) \tilde{\psi}_j(x).$$

\implies i.,ii.,iii.,iv.,v. erfüllt und $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$.

Fall 2:

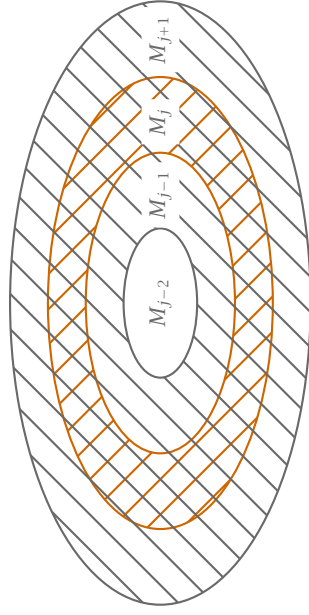
M ist offen.

$$M_j := \left\{ x \in M : |x| \leq j \wedge d(x, \mathbb{R}^n \setminus M) \geq \frac{1}{j} \right\}$$

Also ist M_j kompakt und $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$. Für festes j :

$$\{O_\alpha \cap \text{int}(M_{j+1}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M_{j-2}) : \alpha \in A\}$$

ist eine offene Überdeckung von $M_j \setminus \text{int}(M_{j-1}) = M_j \cap \mathbb{R}^n \setminus M_{j+1}$.



$$\begin{aligned} \iff \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \text{Re } f'(z_0) & -\text{Im } f'(z_0) \\ \text{Im } f'(z_0) & \text{Re } f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &+ o\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|\right) \end{aligned}$$

$\iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist differenzierbar in (x_0, y_0) mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \text{Re } f'(z_0) & -\text{Im } f'(z_0) \\ \text{Im } f'(z_0) & \text{Re } f'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(x_0, y_0)$$

RETBWEIS 2.2 vi. $\implies \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \tilde{O} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. $\stackrel{2.20}{\implies}$ i.

i. $\stackrel{2.20}{\implies} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ differenzierbar in O und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

\implies v. $\implies f'$ stetig $\stackrel{2.20}{\implies} u_x, u_y, v_x, v_y$ stetig

\implies vi. ■

2.21 **Beispiel** Sei $O = \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Zum selbst nachrechnen

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\cosh y \sin x}_{u(x,y)} + i \underbrace{\sinh y \cos x}_{v(x,y)} \\ u_x &= \cosh y \cos x \quad \left. \vphantom{u_x} \right\} \gg = \ll \\ v_y &= \cosh y \cos x \quad \left. \vphantom{v_y} \right\} \gg = \ll \\ u_y &= \sinh y \sin x \quad \left. \vphantom{u_y} \right\} \gg = \ll \\ v_x &= -\sinh y \sin x \quad \left. \vphantom{v_x} \right\} \gg = \ll \end{aligned}$$

2.22 **Definition** 1.) $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **wegzusammenhängend**, falls gilt

$$\forall z_0, z_1 \in M \exists \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ Weg stückweise } C^1 : \gamma(a) = z_0 \vee \gamma(b) = z_1$$

2.) $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, falls G offen und wegzusammenhängend. ✕

2.23 **Satz** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph in G mit $f' = 0$ in G . Dann ist f konstant in G .

BEWEIS Sei $z_0 \in G$ fest, $z \in G$, γ Weg von z_0 nach z .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma f'(\zeta) d\zeta = f(z) - f(z_0) \\ \implies \forall z \in G : f(z) &= f(z_0) \end{aligned}$$

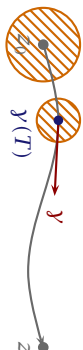
2.24 **Satz** Sei $G \in \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph in G

$$z_0 \in G \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) = 0$$

Damit ist f konstant in G .

BEWEIS Sei $z \in G$, γ ein Weg von z_0 nach z : $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z$. Setze

$$T := \sup \left\{ t \in [a, b] : f \circ \gamma \Big|_{[a,t]} = \text{const.} \right\} \neq \emptyset, \text{ da } t = a \text{ enthalten.}$$



1.) Zeige $T > a$

2.) Zeige $T = b$ (Dann $f(z) = f(z_0) \forall z \in G$)

Zu 1.

$$f(z) \stackrel{2.10}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < R$$

$$= f(z_0)$$

γ stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 \forall t \in [a, a + \delta] : |\gamma(t) - \gamma(a)| < R$

$$\Rightarrow T \geq a + \delta > a$$

Zu 2.: Annahme: $T < b$. Behauptung

$$f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, a \leq t \leq T$$

Induktionsanfang:

$$f'(\gamma(t)) = \lim_{z \rightarrow \gamma(t)} \frac{f(z) - f(\gamma(t))}{z - \gamma(t)}$$

$$\stackrel{\text{Teilfolge}}{=} \lim_{s \rightarrow t, s \in [a, T]} \frac{f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))}{\gamma(s) - \gamma(t)} \stackrel{f|_{[a, T]} \equiv 0}{=} 0$$

Induktionsschritt genauso.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(\gamma(T)) = 0$$

$$\stackrel{\text{wie 1.}}{\Rightarrow} f(z) = f(\gamma(T)) = f(z_0) \text{ für } |z - \gamma(T)| < R$$

■

$$\blacktriangleright x \in K : \varphi(x) = \int_{\gamma \in K_\delta} 1 \cdot g_\delta(\gamma - x) d\mu_\gamma = \int_{\gamma \in K_\delta(x) \subseteq K_\delta} g_\delta(\gamma - x) d\mu_\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} g_\delta(\gamma) d\gamma = 1 \quad \checkmark$$

$$\blacktriangleright \varphi \in C^\infty \text{ (ohne Beweis)} \quad \checkmark$$

■

5.6 **Satz** Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq O$ kompakt. Dann existiert $O' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $K \subseteq O' \subseteq \overline{O'} \subseteq O$.

BEWEIS Sei $\delta := d(K, \mathbb{R}^n \setminus O) \stackrel{5.3}{>} 0$ falls $O \neq \mathbb{R}^n$, $\delta = 1$ falls $O = \mathbb{R}^n$.

$$O' := \bigcup_{x \in K} K_{\delta/2}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \delta/2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \subseteq O' \\ O' \text{ offen (Vereinigung offener Mengen)} \\ \overline{O'} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \delta/2\} \subseteq O \end{cases}$$

■

5.7 **Satz** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\{O_1, \dots, O_N\}$ offene Überdeckung von K . Dann existieren $O'_1, \dots, O'_N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit

$$\overline{O'_j} \subseteq O_j, \quad O'_j \text{ beschränkt, } K \subseteq \bigcup_{j=1}^N O_j$$

BEWEIS

$$K_1 := K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=2}^N O_j \right) \text{ ist kompakt.}$$

$K_1 \subseteq O_1$, da $K_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus O_1) = K \cap \bigcap_{j=1}^N \mathbb{R}^n \setminus O_j = \emptyset$. Wähle $O'_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $K_1 \subseteq O'_1 \subseteq \overline{O'_1} \subseteq O_1$ (5.6).

$\Rightarrow \{O'_1, O_2, O_3, \dots, O_N\}$ überdeckt K wegen

$$\emptyset = K_1 \cap (\mathbb{R}^n \setminus O'_1)$$

$$= K \cap (\mathbb{R}^n \setminus O'_1) \cap \left(\bigcap_{j=2}^N \mathbb{R}^n \setminus O_j \right)$$

$$= K \cap \mathbb{R}^n \setminus \left(O'_1 \cup \bigcup_{j=2}^N \mathbb{R}^n \setminus O_j \right)$$

und O'_1 beschränkt, $\overline{O'_1} \subseteq O_1$. Sukzessive O_j durch O'_j ersetzen \Rightarrow fertig. ■

5.4 **Satz 1.**

$$g_1(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}), g_1 \geq 0, \text{supp}(g_1) = [0, \infty[.$$

2.)

$$g_2(x) := g_1(1 - |x|^2), \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}), g_2 \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, \text{supp}(g_2) = \overline{K_1^n}(0).$$

3.)

$$g_3(x) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} g_2(x) dx} g_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann zusätzlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_3(x) dx = 1.$$

4.) Sei $\delta > 0$,

$$g_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} g_3\left(\frac{x}{\delta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow g_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}), g_\delta \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, \text{supp}(g_\delta) = \overline{K_\delta(0)}, \int_{\mathbb{R}^n} g_\delta(x) dx = 1. \quad \times$$

5.5 **Satz** Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq O$ kompakt. Dann existiert $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ mit $\varphi(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{supp}(\varphi) \subseteq O$, $\varphi(x) = 1$ auf K .

BEWEIS Sei

$$\delta := \frac{1}{4} d(K, \mathbb{R}^n \setminus O) > 0.$$

Setze $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq \delta\}$. Dann $K_\delta \subseteq O$, K_δ abgeschlossen. Damit hat³

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_\delta}(y) g_\delta(y - x) d\mu_y$$

die gewünschten Eigenschaften.

- ▶ $\varphi(x) \geq 0 \quad \checkmark$
- ▶ $\text{supp}(\varphi) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq 2\delta\} \subseteq O \quad \checkmark$

³ $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

1.3 Nullstellen

3.1 **Definition** Sei $O \rightarrow \mathbb{C}$ offen, f holomorph in O , $z_0 \in O$, $f(z_0) = 0$. Falls

$$\exists k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

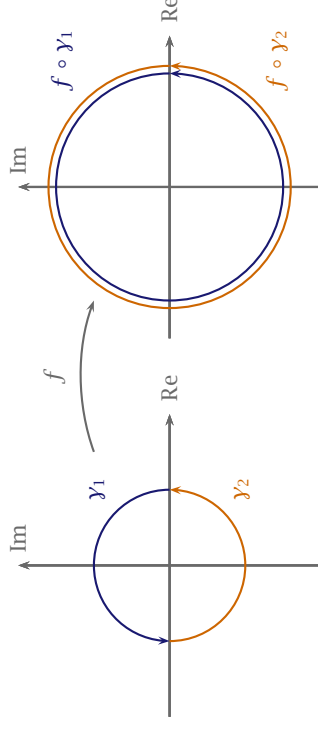
so heißt

$$K := \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

die **Ordnung** oder **Vielfachheit** der Nullstelle z_0 . Andernfalls heißt die Ordnung der Nullstelle unendlich. \times

Betrachte:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2 : re^{i\varphi} \mapsto r^2 e^{2i\varphi}$$



Offensichtlich ist f nicht injektiv. Jedes Element $w \neq 0$ hat genau zwei Urbilder.

Abhilfe: **Riemannsche Fläche**. Lege zwei $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Ebenen übereinander, schneide sie jeweils an der positiven reellen Achse auseinander, verbinde den Rand für $\text{Im } z \uparrow 0$ der unteren Ebene mit dem Rand $\text{Im } z \downarrow 0$ der oberen, verbinde die beiden anderen Ränder. Dann ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow F = \{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in \mathbb{R}, e^{i\varphi+2\pi} \neq e^{i\varphi}, re^{i\varphi+4\pi} = e^{i\varphi}\}$$

bijektiv. Die Riemannsche Fläche hat zwei Blätter.

▶ **Beispiel**

$$f(z) = \sin z^2$$

Nullstelle bei $z = 0$

$$f'(0) = 2z \cos z^2 \Big|_{z=0} = 0$$

$$f''(0) = 2 \cos z^2 - 4z^2 \sin z^2 \Big|_{z=0} = 2$$

$z = 0$ ist Nullstelle 2. Ordnung. \blacktriangleleft

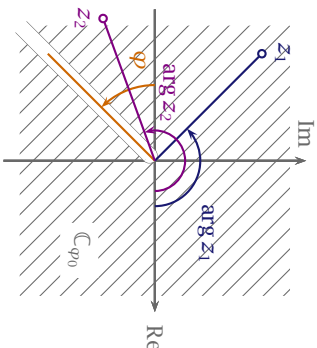
Ziel: Ist z_0 Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, so verhält sich f und ihre »Umkehrfunktionen« lokal wie

$$z \mapsto (z - z_0)^k$$

und ihre »Umkehrfunktionen«.

-

3.2 **Hilfssatz** Sei $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\mathbb{C}_{\varphi_0} := \{r e^{i\varphi} : r > 0, -\pi + \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0\} = \mathbb{C} \setminus \{r e^{i(\varphi_0 + \pi)} : r > 0\}$



$$\arg_{\varphi_0}(z) = \begin{cases} \arg z & -\pi + \varphi_0 < \arg z < \pi \\ \arg z + 2\pi & -\pi \leq \arg z < -\pi + \varphi_0 \end{cases}$$

Dann ist $\arg_{\varphi_0} : \mathbb{C}_{\varphi_0} \rightarrow]-\pi + \varphi_0, \pi + \varphi_0[$ stetig.

BEWEIS $z \mapsto 1/|z|$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$ sind stetig auf \mathbb{C}_{φ_0} .

$$\arg_{\varphi_0}(z) = \begin{cases} \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad (\text{evtl.} + 2\pi) & \text{für } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \quad (\text{evtl.} + 2\pi) & \text{für } \operatorname{Re} z \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad (\text{evtl.} + 2\pi) & \text{für } \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$$

Jede einzelne Zeile ist stetig und die Bereiche überlappen sich. Also ist \arg_{φ_0} stetig auf der Vereinigung der einzelnen Bereiche. ■

3.3 **Satz** Sei $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{C}_{\varphi_0} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$z^{1/k} := \sqrt[k]{z} := |z|^{1/k} e^{i \frac{1}{k} \arg_{\varphi_0} z}$$

Dann ist $\sqrt[k]{\cdot}$ holomorph und

$$\left(\sqrt[k]{z}\right)^k = z \quad \sqrt[k]{z'} = \frac{1}{k \left(\sqrt[k]{z}\right)^{k-1}}$$

BEWEIS 1.) $\sqrt[k]{\cdot}$ ist stetig als Kombination stetiger Funktionen

\Rightarrow verträgliche Orientierung von ∂S im Gegenuhreigersinn.
Falls $A(S)$ die Karte $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$ mit $\tilde{\varphi}(x_1^i) = \begin{pmatrix} -x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}$ enthält, ist die verträgliche Orientierung von ∂S im Uhrzeigersinn. ▶

2.5 Zerlegung der Eins

5.1 **Definition** Sei $\psi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} (oder was anderes). Der Träger (engl.: support) von ψ

$$\operatorname{supp} \psi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) \neq 0\}}.$$

×

5.2 **Satz** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ offene Überdeckung von M . Dann existiert eine abzählbare oder endliche Menge $\{\psi_j : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})\}$ mit

- i.) $\forall j \forall x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \psi_j(x) \leq 1$.
- ii.) $\forall j : \operatorname{supp} \psi_j$ ist kompakt.
- iii.) $\forall j \exists \alpha \in A : \operatorname{supp} \psi_j \subseteq O_\alpha$.
- iv.) $\forall x \in M : \#\{j : \psi_j(x) \neq 0\} < \infty$.
- v.) $\forall x \in M : \sum_j \psi_j(x) = 1$.

Die Familie $\{\psi_j\}$ heißt **Zerlegung der Eins** bezüglich $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$. ×

5.3 **Satz** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \cap M = \emptyset$. Dann ist der Abstand zwischen K und M definiert als

$$d(K, M) := \inf\{|x - y| : x \in K, y \in M\} > 0$$

und dieses Infimum ist ein Minimum.

BEWEIS Seien (x_n) Folge in K , (y_n) Folge in M , $|x_n - y_n| \rightarrow d(K, M)$.

$$K \text{ kompakt} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x \in K$$

$$\Rightarrow |y_{n_k}| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k}| \Rightarrow (y_{n_k}) \text{ ist beschränkt.}$$

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow y_{n_k} \rightarrow y \in \mathbb{R}^n$

$$M \text{ abgeschlossen} \Rightarrow y \in M$$

$$\Rightarrow x \in K, y \in M, d(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = d(K, M). \quad \blacksquare$$

Sei $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$. ψ bildet Randpunkte auf Randpunkte ab.

$$\psi_k(z_1, \dots, z_{k-1}, 0) = 0 \implies \frac{\partial}{\partial z_j} \psi_k(\varphi_2^{-1}(x_0)) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1$$

ψ bildet innere Punkte auf innere Punkte ab.

$$\psi_k(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k > 0) > 0 \implies \frac{\partial}{\partial z_k} \psi_k(\varphi_2^{-1}(x_0)) > 0$$

$$\implies 0 < \det \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \det \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial z_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \psi_k}{\partial z_{k-1}} & \frac{\partial \psi_k}{\partial z_k} \end{pmatrix}$$

Nach dem Entwicklungssatz nach der k -ten Zeile:

$$= (-1)^{2k} \frac{\partial \psi_k}{\partial z_k} (\varphi_2^{-1}(x_0)) \det \left(\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)} \right) (\varphi^{-1}(x_0))$$

Zugehörige Karten $(\tilde{\varphi}_j, \tilde{U}_j)$ des Randes ∂S :

$$\tilde{\varphi}_j(\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}) = \varphi_j(\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, 0), \quad \tilde{U}_j = U_j \cap \partial S$$

Aus 4.6: $\{(\tilde{\varphi}_1, \tilde{U}_1), \dots, (\tilde{\varphi}_n, \tilde{U}_n)\}$ ist Atlas von S . Es gilt

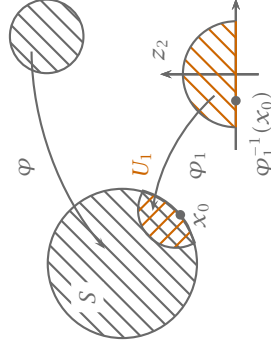
$$(\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2)(z_1, \dots, z_{k-1}) = \underbrace{(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)_i(z_1, \dots, z_{k-1}, 0)}_{\psi_i}, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

$$\implies \det \left(\frac{\partial(\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2)}{\partial(z_1, \dots, z_{k-1})} \right) = \det \left(\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_{k-1})}{\partial(z_1, \dots, z_{k-1})} \right) > 0$$

$\implies \{(\tilde{\varphi}_1, \tilde{U}_1), \dots, (\tilde{\varphi}_n, \tilde{U}_n)\}$ ist orientierter Atlas von ∂S .

4.12 ▶ **Beispiel** $S = K_1^{(2)}(0) \subseteq \mathbb{R}^2, \partial S = \{(x_1^1, x_2^1) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

1.) Sei $(\varphi, U) : \varphi \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, U = K_1^{(2)}(0)$. Annahme: $A(S)$ ist orientierter Atlas der (φ, U) enthält.



2.) $\sqrt[k]{z}$ ist injektiv, denn

$$(\sqrt[k]{z})^k = |z| e^{i \arg z} = z$$

3.) Ableitung: Sei $z_0 \in \mathbb{C}_{\neq 0}, f(z) := z^k$

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{z} \Big|_{z=z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\sqrt[k]{z} - \sqrt[k]{z_0}}{z - z_0} \\ &\stackrel{g=h \circ \sqrt[k]{\cdot}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{f(g(z)) - f(g(z_0))} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{1}{\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}} \\ &= \frac{1}{\lim_{\zeta \rightarrow g(z_0), \zeta \neq g(z_0)} \frac{f(\zeta) - f(g(z_0))}{\zeta - g(z_0)}} \\ &= \frac{1}{f'(g(z_0))} \stackrel{f'(z) = kz^{k-1}}{=} \frac{1}{k(\sqrt[k]{z_0})^{k-1}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

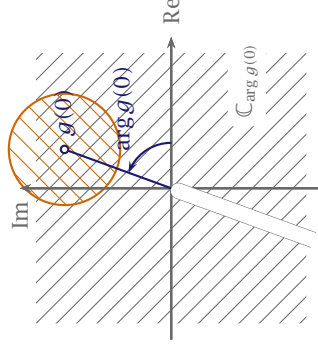
3-4 **Satz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in $O, z_0 \in O$ Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert $r > 0$ und eine holomorphe Funktion $h : K_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) \neq 0, \quad f(z) = h(z)^k \text{ für } |z - z_0| < r$$

BEWEIS O.B.d.A.: $z_0 = 0$, und weil $f^{(j)} = 0, j = 0, \dots, k-1$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = z^k \underbrace{\left(a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^{n-k} \right)}_{=: g(z)}, \text{ für } |z| < R$$

Dann ist g holomorph in $K_r(0), g(0) = a_k \neq 0$.



¹Ohne Bedenken des Autors

Da g stetig ist:

$$\exists r > 0 : |z| < r \implies |g(z) - g(0)| < \frac{|g(0)|}{2}$$

Dann folgt:

$$|z| < r \implies g(z) \in \mathbb{C}_{\arg g(0)}$$

Definiere

$$h(z) := z \sqrt[k]{g(z)}, \text{ f\u00fcr } |z| < r$$

Dann:

$$h(0) = 0 \sqrt[k]{g(0)} = 0$$

$$h'(0) = 1 \underbrace{\sqrt[k]{g(0)} + 0}_{\neq 0} \frac{1}{k(\sqrt[k]{g(0)})^{k-1}} \neq 0$$

h ist holomorph auf $K_r(0)$ als Produkt und Verkettung holomorpher Funktionen. ■

3.5 **Beispiel** Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^z$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= |e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z}| = |e^{\operatorname{Re} z}| |e^{i \operatorname{Im} z}| \\ &= e^{\operatorname{Re} z} > 0 \end{aligned}$$

Trotzdem ist f nicht injektiv:

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$



3.6 **Lokale Umkehrfunktion** Sei f holomorph in O und $z_0 \in O$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert $r > 0$, sodass $f|_{K_r(z_0)}$ injektiv ist. Weiter gelten

- ▶ $f(K_r(z_0))$ ist offen
- ▶ $f^{-1} : f(K_r(z_0)) \rightarrow K_r(z_0)$ ist holomorph
- ▶ $(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ f\u00fcr $w \in f(K_r(z_0))$

BEWEIS Seien

$$\begin{aligned} u(x, y) &:= \operatorname{Re} f(x + iy) \\ v(x, y) &:= \operatorname{Im} f(x + iy) \end{aligned}$$

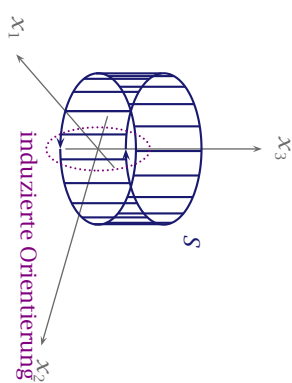
Dann

$$\begin{aligned} f(z) = w_1 + iw_2 &\iff \begin{cases} \operatorname{Re} f(x + iy) = w_1 \\ \operatorname{Im} f(x + iy) = w_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \theta_1(x, y, w_1, w_2) := u(x, y) - w_1 = 0 \\ \theta_2(x, y, w_1, w_2) := v(x, y) - w_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Es gelten

2.)

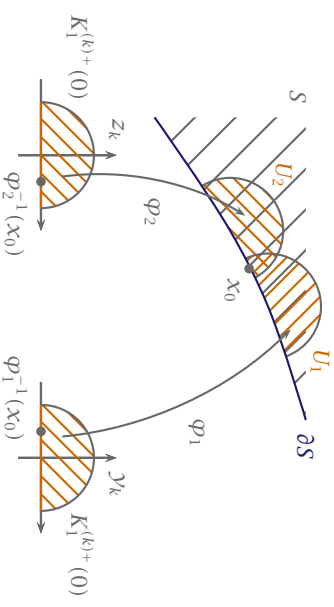
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \wedge 0 \leq x_3 \leq 1 \right\}$$



∂S besteht aus zwei Kreisen. S ist orientierbar (ohne Beweis). Durch die Orientierung von S wird eine Orientierung von ∂S induziert.

3.) M\u00f6bius-Band: Nicht orientierbare Mannigfaltigkeit. ▶

4.11 **Definition** Sei $S \in C^1$ orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $k \geq 2$. $A(S)$ orientierter Atlas. Durch die Konstruktion von 4.6 wird ein orientierter Atlas $A(\partial S)$ gegeben. Die dadurch definierte Orientierung von ∂S hei\u00dft **vertr\u00e4glich** mit der Orientierung von S .



Wir wissen: $x_0 \in \partial S$, $x_0 \in U_1 \cap U_2$, $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2) \in A(S)$ orientiert

$$\implies \det \left(\frac{\partial(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)}{\partial z} \right) > 0$$

- 4.) Zwei orientierte Atlanten $A(S)$, $\tilde{A}(S)$ heißen *kompatibel*, falls $A(S) \cup \tilde{A}(S)$ orientiert ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller orientierten Atlanten von S . Jede Äquivalenzklasse heißt *Orientierung* von S . \times

4.10 ▶ **Beispiel 1.)**

$$S = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 3 \right\}$$

$$\varphi_1(\gamma) = \frac{3}{2}(\gamma + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in K_1^{(1)}(0) =]-1, 1[, U_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 < t < 3 \right\}$$

$$\varphi_2(\gamma) = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in [0, 1[, U_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 \leq t < 1 \right\}$$

Kompatibilität? $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(z) = \frac{2}{3}z - 1$$

$$\frac{d}{dz}(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) = \frac{2}{3} > 0$$

\Rightarrow gleich orientiert.

$$\varphi_3(z) = (3-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in [0, 1[, U_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 2 < t \leq 3 \right\}$$

Kompatibilität? $U_3 \cap U_2 = \emptyset$ \checkmark

$$U_3 \cap U_1 \neq \emptyset$$

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3(z) = \frac{2}{3}(3-z) - 1$$

$$\frac{d}{dz}(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_3) = -\frac{2}{3} < 0$$

\Rightarrow nicht gleich orientiert. Stattdessen:

$$\varphi_3(z) = (3+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in]-1, 0[, U_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 2 < t \leq 3 \right\}$$

\Rightarrow (φ_1, U_1) , (φ_3, U_3) gleich orientiert.

\Rightarrow $A(S) = \{(\varphi_j, U_j), j = 1, 2, 3\}$ ist orientierbarer Atlas von S .

1.) $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in C^1(\cdot)$

2.) und

$$\begin{vmatrix} \partial_x \mathcal{G}_1 & \partial_y \mathcal{G}_1 \\ \partial_x \mathcal{G}_2 & \partial_y \mathcal{G}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} f' & -\operatorname{Im} f' \\ \operatorname{Im} f' & \operatorname{Re} f' \end{vmatrix} \\ = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

3.) $\mathcal{G}_j(x_0, y_0, \operatorname{Re} f(z_0), \operatorname{Im} f(z_0)) = 0$. Also $(x_0, y_0, \operatorname{Re} f(z_0), \operatorname{Im} f(z_0))$ ist eine Lösung.

Satz über implizite Funktionen Es existiert eine Umgebung \tilde{U} von $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ im \mathbb{R}^2 und $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\tilde{U} \rightarrow \mathbb{R})$ mit

$$\mathcal{G}_j(\varphi_1(w_1, w_2), \varphi_2(w_1, w_2), w_1, w_2) = 0, \quad j = 1, 2$$

und diese Lösungen sind eindeutig in einer Umgebung \tilde{V} von (x_0, y_0) . \times

Setze

$f|_{\tilde{V}}$ ist injektiv

$$V = \{x + iy : x, y \in \tilde{V}\} \Rightarrow \begin{cases} f|_{\tilde{V}} \text{ ist injektiv} \\ f^{-1}(w_1, w_2) = \varphi_1(w_1, w_2) + i\varphi_2(w_1, w_2) \\ f^{-1} \text{ ist stetig, da } \varphi_1, \varphi_2 \text{ stetig} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists r > 0 : K_r(z_0) \subseteq V$, da V Umgebung von z_0 . Wir wissen:

$$f(f^{-1}(w)) = w$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(w))' = \lim_{u \rightarrow w} \frac{f^{-1}(u) - f^{-1}(w)}{u - w}$$

$$= \lim_{u \rightarrow w} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(u)) - f(f^{-1}(w))}{f^{-1}(u) - f^{-1}(w)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

3.7 **Blätterzahl einer Nullstelle** Sei f holomorph in O , $z_0 \in O$ Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung O_ε von z_0 mit

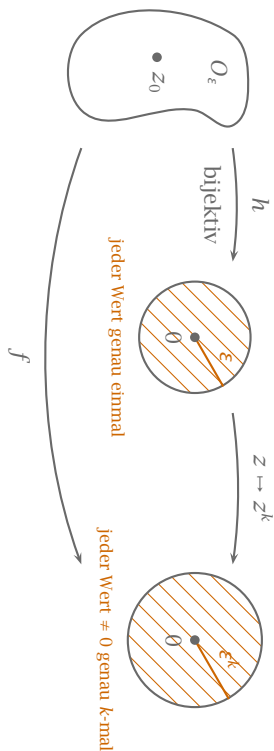
$$f(O_\varepsilon) = K_\varepsilon(0)$$

, sodass

$$f|_{O_\varepsilon} \text{ nimmt } \begin{cases} \text{jeden Wert } w \text{ mit } 0 < |w| < \varepsilon \text{ genau } k \text{ Mal an} \\ w = 0 \text{ genau ein Mal an} \end{cases}$$

BEWEIS 3.4 $\implies f(z) = h(z)^k, h$ holomorph in $K_\delta(z_0), h'(z_0) \neq 0$.

3.6 $\implies h|_{K_\delta(z_0)}$ injektiv, falls δ klein genug. Außerdem $h(K_\delta(z_0))$ offen. Wähle $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(0) \subseteq h(K_\delta(z_0))$. Setze $O_\epsilon := h^{-1}(K_\epsilon(z_0))$. Dann:



3-8 **Folgerung:** Nullstellen endlicher Ordnung sind isoliert: Ist f holomorph in $O, z_0 \in O$ Nullstelle endlicher Ordnung, so gilt:

$$\exists \epsilon \forall z \in K_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} : f(z) \neq 0$$

3-9 **Satz von der inversen Abbildung** Seien $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : O_1 \rightarrow O_2$ holomorph und bijektiv. Dann

- ▶ $f'(z) \neq 0$ in O_1
- ▶ f^{-1} ist holomorph
- ▶ $(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$

BEWEIS Annahme: $\exists z_0 \in O_1 : f'(z_0) = 0$

$$g(z) := f(z) - f(z_0)$$

Also ist g holomorph und z_0 ist Nullstelle mindestens 2. Ordnung.

Fall 1: z_0 ist Nullstelle endlicher Ordnung

- $\stackrel{3.7}{\implies} g$ ist nicht injektiv.
- $\implies f$ ist nicht injektiv. \neq

Fall 2: z_0 ist Nullstelle der Ordnung ∞

- $\stackrel{2.2.4}{\implies} g = \text{const.}$ in $K_\epsilon(z_0) \subseteq O_1$.
 - $\implies f = \text{const.}$ in $K_\epsilon(z_0) \subseteq O_1$. \neq
- Rest aus 3.6 ■

Dann ist $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : D_2 \rightarrow D_1$ bijektiv.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}(z_0) &= \frac{\partial}{\partial z_1} (\varphi_1 \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2))(z_0) \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \underbrace{\left(\frac{\partial (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)}{\partial z} (z_0) \right)}_{=: \lambda_j} \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \in T_{x_0} \\ \implies \text{LH} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}(z_0), \dots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_k}(z_0) \right\} \subset T_{x_0} \end{aligned}$$

Betrachtet man $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, ergibt sich die andere Richtung und damit $\text{LH}\{\dots\} = T_{x_0}$

4-8 **Orientierung von Karten** 1.) Zwei Basen $\{b_1, \dots, b_k\}, \{c_1, \dots, c_k\}$ eines k -dimensionalen Raumes heißen **gleich orientiert**, falls

$$b_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{ji} c_i \quad \wedge \quad \det(\alpha_{ji}) > 0$$

2.) Sei $S \in \mathbb{C}^1$. Zwei Karten (φ_1, U_1) heißen **gleich orientiert**, falls

$$\det \left(\frac{\partial (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)_j}{\partial z} (z_0) \right) > 0 \text{ [für } z_0 \in D_2 \text{ (vgl. vorher)]}$$

(Vorzeichen der Determinante ist auf D_2 konstant, da stetig und immer $\neq 0$) ✕

Korrektur zu 4.1, Punkt 3: $S \in \mathbb{C}^m, m \geq 1$, falls $\varphi_j \in \mathbb{C}^m (j = 1, \dots, N)$ und

Damit wird in 4.7 $\dim T_{x_0} = k$ offensichtlich, da

$$T_{x_0} = \text{LH} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\varphi^{-1}(x_0)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(\varphi^{-1}(x_0)) \right\}$$

4-9 **Orientierung von Mannigfaltigkeiten** 1.) Zwei Karten $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ heißen **kompatibel**, falls $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder falls sie **gleich orientiert** sind.

- 2.) Ein Atlas heißt **orientiert**, wenn alle seine Karten paarweise kompatibel sind.
- 3.) Eine Mannigfaltigkeit $S \in \mathbb{C}^1$ heißt **orientierbar**, falls sie mindestens einen orientierten Atlas besitzt.

4.7 **Satz** Sei $k \geq 1$ und $S \in C^1$ eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n . Sei außerdem $x_0 \in S$ mit einer Karte $(\varphi_1, U_1), x_0 \in U_1$. Dann heißt

$$T_{x_0} := \text{LH} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(\varphi_1^{-1}(x_0)), \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k}(\varphi_1^{-1}(x_0)) \right\}$$

Tangentenraum in x_0 . Es gilt

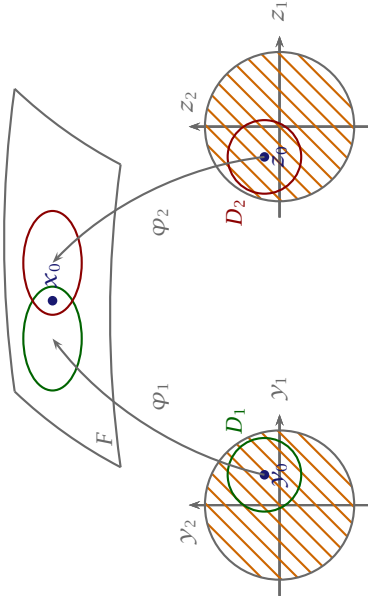
- a.) $\dim T_{x_0} = k$,
- b.) T_{x_0} ist unabhängig von der Karte.

BEWEIS a.)

$$\begin{aligned} \text{Id} &= \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 : K_1^{(k)}(0) \rightarrow K_1^{(k)}(0) : y \rightarrow y \\ &\Rightarrow E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Id}}{\partial y_1} & \frac{\partial \text{Id}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \text{Id}}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} (y_0), \quad y_0 = \varphi_1^{-1}(x_0) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} \end{pmatrix} (x_0)}_{\text{Rang}=k} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} \end{pmatrix} (y_0)}_{\Rightarrow \text{Rang} \leq k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim T_{x_0} = k$

b.)



Seien $(\varphi_j, U_j), j = 1, 2$ zwei Karten mit $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Setze $D_j := \varphi_j^{-1}(U_1 \cap U_2)$.

3.10 **Identitätssatz** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f, g holomorph in $G, (z_n)$ Folge in $G, z_n \rightarrow z_0 \in G, z_n \neq z_0$ für $n \in \mathbb{N}, f(z_n) = g(z_n)$. Dann ist $f = g$ in G .

BEWEIS Sei $h = f - g$ in G . Dann gilt h holomorph, $h(z_n) = 0$. Daraus folgt $h(z_0) = 0$. Wegen $h(z_n) = 0, z_n \rightarrow z_0$ und $z_n \neq z_0$ ist die Nullstelle z_0 nicht isoliert.

$\stackrel{3.10}{\Rightarrow} z_0$ ist Nullstelle der Ordnung ∞ .

$\stackrel{2.24}{\Rightarrow} h = \text{const.}$ in G und $h(z_0) = 0 \Rightarrow h = 0$ in G , also $f = g$ in G . ■

3.11 **Gebietstreue** $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph in $G, f \neq \text{const.}$. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.

BEWEIS 1.) $f(G)$ ist wegzusammenhängend: Seien $w_j = f(z_j) \in f(G), j = 1, 2$.

G Gebiet \Rightarrow Es existiert ein Weg γ in G von z_1 nach z_2
 $\Rightarrow f \circ \gamma$ ist Weg von w_1 nach w_2 in $f(G)$

2.) $f(G)$ ist offen: Sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$.

$g := f(z) - f(z_0), z \in G$
 $\Rightarrow g$ holomorph, z_0 Nullstelle.

Fall 1: z_0 hat Ordnung ∞

$\stackrel{2.24}{\Rightarrow} g = \text{const.}$, also $f = \text{const.}$. ■

Fall 2: z_0 hat endliche Ordnung $k \in \mathbb{N}$

$\stackrel{3.7}{\Rightarrow} \exists O_\varepsilon \in G : K_\varepsilon(0) \subseteq \text{Bild}(g)$

$\Rightarrow K_\varepsilon(f(z_0)) = f(z_0) \oplus K_\varepsilon(0) \subseteq \text{Bild}(f)$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(w_0) \subseteq f(G)$

Definition K ist kompakt, \Leftrightarrow

$\forall (O_i)_{i \in I}$ offenes Mengensystem : $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n \in I : K \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_{i_j}$

K ist folgenkompakt, \Leftrightarrow

$\forall (x_n)$ Folge in K : Es existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \rightarrow x \in K$

H eine Borel $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann

K kompakt $\Leftrightarrow K$ beschränkt und K abgeschlossen

\Rightarrow gilt immer

\Leftarrow gilt nicht in ∞ -dimensionalen Räumen

3.12 **Maximumprinzip I** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in G . Falls ein $z_0 \in G$ existiert, so dass

$$\forall z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)| \tag{*}$$

oder

$$f(z_0) \neq 0 \wedge \forall z \in G : |f(z)| \geq |f(z_0)|$$

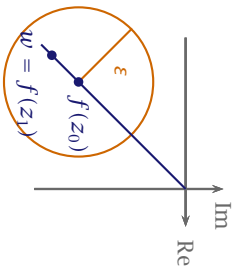
(d.h. f nimmt in G das Maximum oder Minimum $\neq 0$ an) Dann gilt $f = \text{const.}$ in G

BEWEIS Sei $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$ und f nicht konstant. Nach 3.11 ist $f(G)$ ein Gebiet und insbesondere offen, es existiert also $\varepsilon > 0$ mit

$$K_\varepsilon(f(z_0)) \subseteq f(G)$$

Wir finden jetzt anschaulich ein $w \in K_\varepsilon(f(z_0))$ mit $|w| > |f(z_0)|$. Da w im Bild von f liegt, existiert auch ein $z_1 \in G$ mit

$$|f(z_1)| = |w| > |f(z_0)|$$



Das stellt ein Widerspruch zur Voraussetzung dar.

Den zweiten Fall behandelt man analog (die Forderung $f(z_0) \neq 0$ wird klar, weil man in diesem Fall keinen Widerspruch erzeugen kann). ■

3.13 **Maximumprinzip II** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, G beschränkt, $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und f holomorph in G . Dann

1.) $\exists z_1 \in \partial G \forall z \in \bar{G} : |f(z)| \leq |f(z_1)|$

2.) Falls $\min_{z \in \bar{G}} |f(z)| > 0$:

$$\exists z_2 \in \partial G \forall z \in \bar{G} : |f(z)| \geq |f(z_2)|$$

BEWEIS \bar{G} ist kompakt und $|f| : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also werden in \bar{G} das Minimum z_1 und das Maximum z_2 in jedem Fall angenommen:

$$\exists z_1, z_2 \in \bar{G} \forall z \in \bar{G} : |f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|$$

Falls $z_1 \in \partial G$, sind wir schon fertig. Sei also $z_1 \in G$. Damit ist nach 3.12 f konstant in G und wegen der Stetigkeit auch in \bar{G} , also ist $z_1 \in \partial G$ wählbar. Genauso für z_2 . ■

bzw.

$$\varphi_x :]-1, 0] \rightarrow U(x)$$

und

$$\varphi_x^{-1}(x) \in \{x \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\} \quad (k \geq 2)$$

bzw.

$$\varphi_x^{-1}(x) = 0 \quad (k = 1).$$

Die Menge aller Randpunkte ist ∂S .

×

4.5 **Bemerkung:** Die Festlegung $x \in \partial S$ hängt nicht von der Wahl der Karte ab. Sind $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ zwei Karten mit $x \in U_1 \cap U_2$, so bildet

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : K_1^{(k)+}(0) &\rightarrow K_1^{(k)+}(0) \\ [0, 1[\rightarrow]-1, 0] & \\ \vdots & \end{aligned}$$

innere Punkte auf innere Punkte ab (Ohne Beweis). Also auch Randpunkte auf Randpunkte. ◁

4.6 **Satz** Ist $S \subseteq \mathbb{C}^m$ eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand im \mathbb{R}^n ($k \geq 1$), so ist ∂S eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^m ohne Rand. Insbesondere ist $\partial(\partial S) = \emptyset$.

BEWEIS $k = 1$: $x \in \partial S \iff x = \varphi_x(0)$. Da es nur endlich viele Karten gibt, bekommt man endlich viele Punkte in ∂S , also ergibt sich eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit.

$k = 2$: Zu $x \in \partial S$ existiert eine Karte $(\varphi_x, U(x))$, $\varphi_x \in C^m$, $\varphi_x^{-1} \in C^m$. Sei

$$\tilde{\varphi}_x(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{k-1}) := \varphi_x(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{k-1}, 0)$$

$$\tilde{U}(x) := U(x) \cap \partial S = O \cap S \cap \partial S = O \cap \partial S, \quad O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

$$\implies (\tilde{\varphi}_x, \tilde{U}(x)) \text{ ist Karte.}$$

endlich viele überdecken ∂S

$$\tilde{\varphi}_x \in C^m, \quad \tilde{\varphi}_x^{-1} = \underbrace{\left(\varphi_x^{-1} \Big|_{\partial S} \right)}_{\text{erste } k-1 \text{ Koordinaten}} \in C^m$$

erste $k-1$ Koordinaten

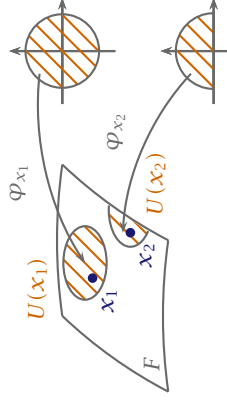
Alle $\tilde{\varphi}_x$ sind auf $K^{(k-1)}(0)$ definiert, also kein Rand. ■

4.3 **Beispiel** Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$ eine Kugel mit Radius r und seien folgende Karten $\varphi_k : K_1^{(2)}(0) \rightarrow S$ für $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(\gamma_1, \gamma_2) &= (\gamma_1, \gamma_2, \pm\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}) \\ U_{1,2} &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\} \\ \varphi_{3,4}(\gamma_1, \gamma_2) &= (\gamma_1, \pm\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \gamma_2) \\ U_{3,4} &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 \geq 0\} \\ \varphi_{5,6}(\gamma_1, \gamma_2) &= (\pm\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \gamma_1, \gamma_2) \\ U_{5,6} &= S \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\} \end{aligned}$$

Dann $A(S) = \{(\varphi_j, U_j), 1 \leq j \leq 6\}$ ein Atlas. Also ist S eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas A .

Fläche im \mathbb{R}^3 mit Rand:



4.4 **Definition** 1.) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand** ($1 \leq k \leq n$), wenn es zu jedem $x \in S$ eine offene Umgebung $U(x) = O \cap S$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gibt und eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_x : K_1^{(k)}(0) &\rightarrow U(x) \text{ oder } \varphi_x : K_1^{(k)+}(0) \rightarrow U(x), \\ K_1^{(k)+}(0) &= \{\gamma \in K_1^{(k)}(0) : \gamma_k \geq 0\}, k \geq 2 \end{aligned}$$

bzw. im Fall $k = 1$

$$\varphi_x :]-1, 1[\rightarrow U(x) \text{ oder } \varphi_x : [0, 1[\rightarrow U(x) \text{ oder } \varphi_x :]-1, 0] \rightarrow U(x)$$

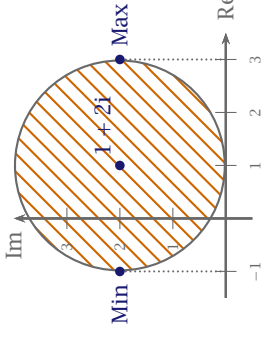
mit den Eigenschaften wie in 4.1 existiert. Die Begriffe »Atlas« und » C^m « werden analog definiert.

2.) $x \in S$ heißt **Randpunkt** von S^2 , falls eine Karte $(\varphi_x, U(x))$ existiert, sodass

$$\varphi_x : K_1^{(k)+}(0) \rightarrow U(x)$$

²Voraussetzung: $\partial S \neq \emptyset$

3.14 **Beispiel** Sei $f(z) = e^z$ und $G = K_2(1 + 2i)$ ein Gebiet. Für den Betrag von f gilt $|f(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.



Also werden Minimum und Maximum auf dem Rand von G (an den Punkten mit kleinstem, bzw. größtem Realteil) angenommen:

$$e^{-1} = |f(-1 + 2i)| \leq |f(z)| \leq |f(3 + 2i)| = e^3$$

3.15 **Satz** Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$, f in x_0 (reell-)analytisch, d.h.

$$f(x) = \gamma_0 + \sum_{n=K}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{für } |x - x_0| < r$$

($r > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{N}$, $a_K \neq 0$). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f_+ := f|_{]x_0 - \varepsilon, x_0[} \quad f_- := f|_{]x_0 - \varepsilon, x_0]}$$

injektiv sind. f_+^{-1} und f_-^{-1} sind dann als **Puiseux-Reihen** darstellbar:

$$f_{\pm}^{-1}(\gamma) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\pm|\gamma - \gamma_0|^{1/K})^n \quad \text{für } \gamma \in \begin{cases} f_+(]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[) \\ f_-([x_0 - \varepsilon, x_0]) \end{cases}$$

mit Koeffizienten $b_n \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $b_1 = |a_K|^{-1/K} \neq 0$.

Die Reihen für f_+ und f_- haben dieselben Koeffizienten b_n . Einziger Unterschied ist das Vorzeichen in der Klammer.

BEWEIS Wir nehmen o.B.d.A. $a_K > 0$ an. Definiere

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - x_0)^n \quad \text{für } |z - x_0| < r \\ &\Rightarrow \begin{cases} g \text{ holomorph} \\ z = x_0 \text{ ist } K\text{-fache Nullstelle} \\ \gamma_0 + g(x) = f(x) \text{ für } x_0 - r < x < x_0 + r \end{cases} \end{aligned}$$

Nach 3.4 existiert $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion h mit $g(z) = h(z)^K$ für $|z - x_0| < \varepsilon$ und $h'(x_0) \neq 0$.

Aus dem Beweis von 3.4 entnehmen wir die Darstellung

$$h(z) = (z - x_0) \left(\sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - x_0)^{n-K} \right)^{1/K}$$

Diese Darstellung ist wohldefiniert in einer Umgebung um x_0 , da dort

$$\sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - x_0)^{n-K} > 0$$

(betrachte für $z = x_0$ und folge aus der Stetigkeit). Man sieht, dass $h(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, wir können also h eingeschränkt auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ als reelle Funktion betrachten. Außerdem ist

$$h'(x_0) = 1 \cdot a_K^{1/K} + 0 \cdot \dots = a_K^{1/K} > 0$$

Nach 3.6 ist dann h^{-1} definiert und holomorph in einer entsprechenden Umgebung von x_0 . Wir folgern weiter aus $h'(x_0) > 0$, dass h streng monoton wachsend in einer Umgebung von x_0 ist.

Da h^{-1} holomorph ist mit $h^{-1}(0) = x_0$, können wir für ein $r' > 0$ schreiben:

$$h^{-1}(z) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad |z| < r'$$

Wir erhalten für die Koeffizienten der Potenzreihe

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} h^{-1}(0)$$

und damit als reelle Ableitungen von h^{-1} betrachtet: $b_n \in \mathbb{R}$. Für b_1 gilt außerdem

$$b_1 = (h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(x_0)} = \frac{1}{a_K^{1/K}}$$

Sei $\mathcal{V}_0 = f(x_0)$. Dann ist

$$f(x) = \mathcal{V} \iff g(x) = \mathcal{V} - \mathcal{V}_0 \iff h(x)^K = \mathcal{V} - \mathcal{V}_0$$

Für $x \geq x_0$ ist (weil h streng monoton wachsend) $h(x) \geq h(x_0) = 0$ und damit

$$\mathcal{V} = h(x)^K + \mathcal{V}_0 \geq h(x_0)^K + \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0$$

in diesem Fall ist $h(x) = (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0)^{1/K}$ und damit

$$x = h^{-1} \left((\mathcal{V} - \mathcal{V}_0)^{1/K} \right) = x_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0)^{1/K})^n}_{=: f_{\mathcal{V}}^{-1}}$$

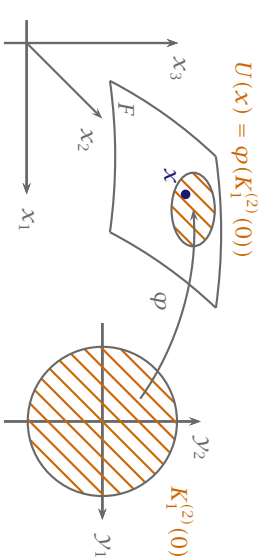
Für $x \leq x_0$ ergibt sich umgekehrt $\mathcal{V} \leq \mathcal{V}_0$, $h(x) = -|\mathcal{V} - \mathcal{V}_0|^{1/K}$ und somit

$$x = h^{-1} \left(-|\mathcal{V} - \mathcal{V}_0|^{1/K} \right) = x_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (-|\mathcal{V} - \mathcal{V}_0|^{1/K})^n}_{=: f_{\mathcal{V}}^{-1}}$$

■

2.4 Mannigfaltigkeiten

Fläche im \mathbb{R}^3



4.1

Definition

1.) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit* in \mathbb{R}^n ($1 \leq k \leq n$), falls zu jedem $x \in S$ eine offene Umgebung $U(x)$ auf S (d.h. $U(x) = O \cap S$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) existiert und eine Abbildung

$$\varphi_x : K_1^{(k)}(0) \rightarrow U(x) \subset O \quad (K_1^{(k)}(0) := \{y \in \mathbb{R}^k : |y| < 1\})$$

mit

a.) φ_x bijektiv und φ_x^{-1} stetig

b.) φ_x stetig differenzierbar

c.) $\text{Rang} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) = k$

Das Tupel $(\varphi_x, U(x))$ nennt man *Karte*.

2.) Eine Menge

$$A(S) := \{(\varphi_j, U_j) : 1 \leq j \leq N\} = \{(\varphi_{x_j}, U(x_j)) : x_j \in S, 1 \leq j \leq N\}$$

mit

$$S = \bigcup_{j=1}^N U_j$$

heißt *Atlas* von S .

3.) S ist von der *Klasse* $m \in \mathbb{N}$ (wir schreiben dann: $S \in C^m$) falls ein Atlas $A(S)$ existiert, sodass $\varphi_j \in C^m$.

Falls $S \in C^m$, betrachten wir nur solche Atlanten.

4.) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $S = \{x_0, \dots, x_N\}$ heißt *0-dimensionale Mannigfaltigkeit*.

4.2 **Vereinbarung** Ab jetzt betrachten wir nur C^m Mannigfaltigkeiten, die einen Atlas besitzen.

$\gamma'(t)$ ist der Tangentenvektor von $\gamma(t)$.

$$= \int_{\gamma(t)} (f_1 \circ \varphi) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \varphi_1 \\ \partial_{x_2} \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot T \, ds$$

mit dem Satz von Green (8.5)

$$\stackrel{8.5}{=} \int_S \{ \partial_{x_1} ((f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_2} \varphi_1) - \partial_{x_2} ((f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_1} \varphi_1) \} \, d(x_1, x_2)$$

Nach dem Satz von Schwarz dürfen wir die partiellen Ableitungen vertauschen

$$= \int_S \{ \partial_{x_1} (f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_2} \varphi - \partial_{x_2} (f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_{x_1} \varphi \} \, d(x_1, x_2)$$

$$\stackrel{x' = (x_1, x_2)}{=} \int_S \left(\sum_{j=1}^3 (\partial_{y_j} f_1) \varphi(x') \cdot \partial_{x_1} \varphi_j(x') \cdot \partial_{x_2} \varphi_1 - \sum_{j=1}^3 (\partial_{y_j} f_1) \varphi(x') \cdot \partial_{x_2} \varphi_j(x') \cdot \partial_{x_1} \varphi_1 \right) dx'$$

Die Summanden für $j = 1$ heben sich weg.

$$= \int_S (\partial_{y_2} f_1 (\partial_{x_1} \varphi_2 \cdot \partial_{x_2} \varphi_1 - \partial_{x_2} \varphi_2 \cdot \partial_{x_1} \varphi_1) + \partial_{y_3} f_1 (\partial_{x_1} \varphi_3 \cdot \partial_{x_2} \varphi_1 - \partial_{x_2} \varphi_3 \cdot \partial_{x_1} \varphi_1)) \, dx'$$

Vergleich mit der anderen Seite.

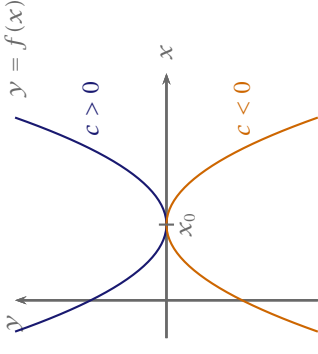
$$\int_F (\nabla \times f) \cdot n \, d\sigma = \int_S (\nabla \times f) \cdot (\partial_{x_1} \varphi \times \partial_{x_2} \varphi) \, d(x_1, x_2)$$

Damit wurde bewiesen: In allen Termen, in denen f_1 vorkommt, stimmen linke und rechte Seite überein. Dasselbe für f_2 und f_3 . ■

Bemerkung: Aus dem Satz von Stokes 3.11 folgt: $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und konvex, $f \in C^2(D \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Dann sind äquivalent:

- i.) $\nabla \times f = 0$ in D
 - ii.) f besitzt in D ein Potential
- $$\exists \Phi \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}) : f = \nabla \Phi$$

3.16 ▶ **Beispiel** Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c(x - x_0)^4$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.



Fall $c < 0$:

$$f_+ : [x_0, \infty[\rightarrow]-\infty, 0]$$

$$f_+^{-1}(y) = x_0 + \left| \frac{y}{c} \right|^{1/4}$$

$$f_- :]-\infty, x_0] \rightarrow]-\infty, 0]$$

$$f_-^{-1}(y) = x_0 - \left| \frac{y}{c} \right|^{1/4}$$

Für $c > 0$ ergeben sich dieselben Abbildungsvorschriften für f_+^{-1}, f_-^{-1} .

1.4 Integrale längs geschlossener Kurven

4.1 ▶ **Beispiel**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } |z| < r$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad \text{für } |z| < R, \frac{1}{R} < r$$

$$\text{Nebenrechnung: } \left| \frac{1}{z} \right| < R \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{R}$$

Sei $h(z) := f(z) + g(1/z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} h \text{ holomorph im Kreisring } \frac{1}{R} < |z| < r \\ \text{Für } \frac{1}{R} < |z| < r \text{ gilt } h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \begin{cases} a_n & n \geq 0 \\ b_n & n \leq -1 \end{cases} \end{cases}$$

4.2 Laurent-Entwicklung Sei $0 \leq r < R$ und

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

und f holomorph in $K_{r,R}(z_0)$. Dann ist f als **Laurent-Reihe** darstellbar.

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in K_{r,R}(z_0)$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=q} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{für } r < q < R$$

(Cauchy-Formel für Laurent-Koeffizienten).

$$H(z) := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt **Hauptteil**,

$$N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt **Nebenteil** der Laurent-Reihe.

×

4.3 **Bemerkung:** 1.) $r = 0$ ist erlaubt. Dann hat f in z_0 eine isolierte Singularität (siehe unten). Riemannscher Hebbarkeitssatz: Entweder ist f beschränkt bei z_0 , dann ist es holomorph fortsetzbar in z_0 , oder f ist unbeschränkt für $z \rightarrow z_0$.

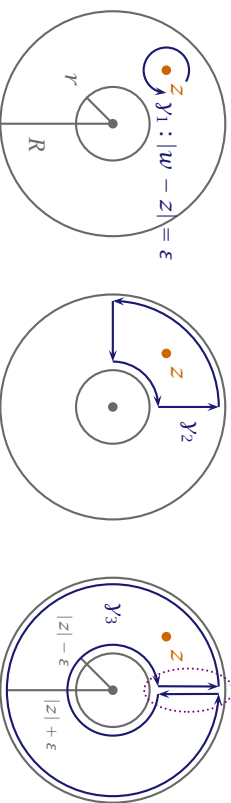
Im ersten Fall sei \tilde{f} die holomorphe Fortsetzung. Für $n < 0$ gilt dann

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=q} \underbrace{f(z) (z - z_0)^{-n-1}}_{\text{holomorph in } K_{r,R}(z_0)} dz = 0$$

Damit ist der Hauptteil der Laurentreihe $H(z) = 0$.

2.) $N(z)$ konvergiert immer im ganzen äußeren Kreis $K_R(z_0)$. $H(z)$ konvergiert immer außerhalb des inneren Kreises: $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\} = \mathbb{C} \setminus K_r(z_0)$.

BEWEIS VON 4.2 O.B.d.A. $z_0 = 0$. Sei z aus $K_{r,R}(0)$ fest, $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{R - |z|, |z| - r\}$



Wegintegrale heben sich weg

Linke Seite

$$\int_S \partial_{x_3} f_3 \, dx = \int_{S_3} \int_{x_3=\alpha(x_1, x_2)}^{\beta(x_1, x_2)} \partial_{x_3} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \, d(x_1, x_2)$$

Rechte Seite

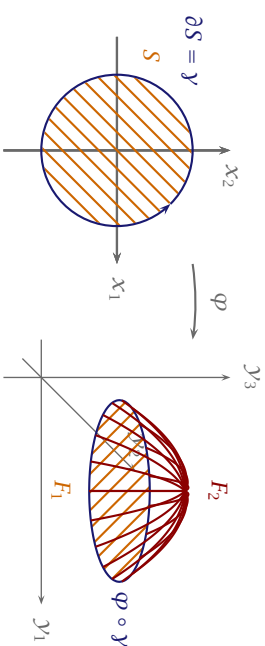
$$\int_{S_3} (f_3(x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) - f_3(x_1, x_2, \alpha(x_1, x_2))) \, d(x_1, x_2)$$

■

3.11 **Satz von Stokes im \mathbb{R}^3** Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^3)$, $F \subseteq D$, Fläche mit Parameterdarstellung (φ, S) , $S \subseteq \mathbb{R}^2$ Greenscher Bereich mit stückweise glattem ∂S , $\varphi \in C^2(\overline{S} \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

$$\int_F (\nabla \times f) \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial F} f \cdot T \, ds$$

Hierbei mit ∂F so orientiert sein, dass es Bild einer für den Greenschen Satz richtig orientierten Randkurve γ von S ist.



Der Satz sagt aus: Egal wie F (z.B. F_1, F_2) in D liegt, solange der Rand gleich bleibt, bleibt

$$\int_F \nabla \times f \, dx$$

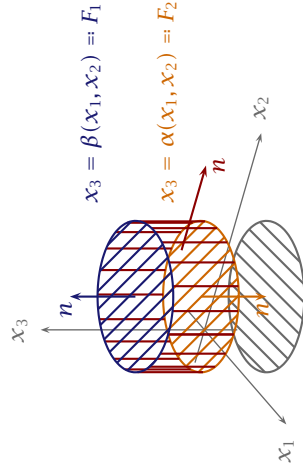
gleich.

BEWEIS Sei

$$\int_{\partial F} f \cdot T \, ds = \sum_{j=1}^3 \int_{\varphi \circ \gamma_j} f_j \cdot T_j \, ds$$

$$\int_{\varphi \circ \gamma_j} f_j \cdot T_j \, ds = \int_a^b f_1(\varphi \circ \gamma(t)) \left(\frac{d}{dt} (\varphi_1 \circ \gamma)(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b f_1(\varphi \circ \gamma(t)) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \varphi_1(\gamma(t)) \\ \partial_{x_2} \varphi_1(\gamma(t)) \end{pmatrix} \gamma'(t) \, dt$$



Der Normalenvektor auf F_1 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta(x_1, x_2) \end{pmatrix} \times \partial_{x_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} \beta \\ -\partial_{x_2} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow n_3 &= \frac{1}{\|\dots\|} > 0 \end{aligned}$$

Da die Komponente n_3 positiv ist, zeigt der Normalenvektor nach oben. Nach Voraussetzung muss der Normalenvektor immer aus S hinausweisen. Vergleicht man dies mit der Grafik zeigt sich, dass die Voraussetzung erfüllt ist. Wir haben also den richtigen Normalenvektor gefunden. Analog für F_2 und F_3 :

$$\begin{aligned} F_2: \quad n_3 &= -\frac{1}{\|\dots\|} \\ F_3: \quad n_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} f_3 \cdot n_3 \, d\sigma &= \int_{F_1} f_3 \cdot \frac{1}{\|\dots\|} \, d\sigma + \int_{F_2} f_3 \cdot \frac{-1}{\|\dots\|} \, d\sigma + \int_{F_3} 0 \, d\sigma \\ &= \int_{S_3} f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta(x_1, x_2) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\dots\|} \dots \, d(x_1, x_2) \\ &\quad - \int_{S_3} f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \alpha(x_1, x_2) \end{pmatrix} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Es gilt: $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \gamma_3$ in $K_{r,R}(0) \setminus \{z\}$.

Cauchyscher Integralsatz (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

Weil der innere Weg in mathematisch negativer Richtung durchlaufen wird erhält das zugehörige Integral ein negatives Vorzeichen

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|+\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} \, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|-\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|+\varepsilon} \underbrace{\frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}}}_{=\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z/w}{w}\right)^n \text{ gleichmäßig}} \, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|-\varepsilon} \underbrace{\frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}}}_{=\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w/z}{w}\right)^n \text{ gleichmäßig}} \, dw \end{aligned}$$

Vertausche Integral und Summe

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|+\varepsilon} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw \, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=|z|-\varepsilon} \frac{f(w)}{w^n} \, dw \, z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw}_{=a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}} \, z^n + \sum_{k=-1}^{-\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho} \frac{f(w)}{w^{k+1}} \, dw}_{=a_k \text{ für } -k \in \mathbb{N}} \, z^k \end{aligned}$$

4.4

Definition 1.) Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in O . Dann hat f in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus O$ eine **isolierte Singularität**, falls

$$\exists r > 0 : K_{0,r}(z_0) \subseteq O$$

(mit anderen Worten: einzig z_0 ist nicht in O enthalten und z_0 ist komplett umhüllt von O)

2.) f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Nach 4.2 gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in } K_{0,r}(z_0)$$

- a.) Falls $H(z) = 0$, d.h. $a_n = 0$ für $n \leq -1$, heißt die Singularität **hebbar**.
 b.) Falls $H(z)$ nur endlich viele Summanden hat und $H \neq 0$, also

$$\exists N \leq -1 : (a_N \neq 0 \wedge \forall n < N : a_n = 0)$$

dann heißt z_0 **Polstelle**,

$$K := \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

heißt **Ordnung des Pols**.

c.) Falls H unendlich viele Summanden hat

$$\forall N \in \mathbb{Z} \exists n < N : a_n \neq 0$$

hat f in z_0 eine **wesentliche Singularität**

4.5 **Beispiel** 1.) Sei $\varrho = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$f : \varrho \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

hat wesentliche Singularität in $z_0 = 0$.

2.) Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ wobei p, q Polynome sind. Vereinfachungen:

1.) $\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q)$, sonst Polynomdivision

2.) Seien z_1, \dots, z_n Nullstellen von q . Es soll $p(z_j) \neq 0$ sein ($j = 1, \dots, n$), sonst gemeinsame Faktoren kürzen, eventuell holomorph ergänzen.

Partialbruchzerlegung:

$$q(z) = (z - z_1)^k \tilde{q}(z) \quad \tilde{q}(z) \neq 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_j}{(z - z_1)^n} + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} \quad \text{mit } \text{Grad}(\tilde{p}) < \text{Grad}(\tilde{q})$$

Hauptteil der Laurent-Reihe

$\Rightarrow f$ hat in z_1 einen Pol der Ordnung K

4.6 **Bemerkung:** f hat genau dann in z_0 einen Pol der Ordnung K , falls

$$f(z) = \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^K} \underbrace{\sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+K}}_{=g(z)}$$

das heißt, falls

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^K} g(z)$$

g holomorph in $K_\varepsilon(z_0)$ und $g(z) \neq 0$, weil $a_{-K} \neq 0$

\Rightarrow Falls f in z_0 einen Pol der Ordnung $K \geq 1$ hat, gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^K} |g(z)| \rightarrow \infty \quad \text{für } z \rightarrow z_0$$

4.7 **Casorati-Weierstraß-Sokhotski** Hat f in z_0 eine wesentliche Singularität, so ist $f(K_{0,\varepsilon}(z_0))$

dicht in \mathbb{C} sobald ε so klein, dass f auf ganz $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ definiert ist, dann für alle solchen $\varepsilon > 0$.

3.8 **Definition** $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Greenscher Bereich**, wenn $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$, wobei S_j ein Starndarbereich ist.

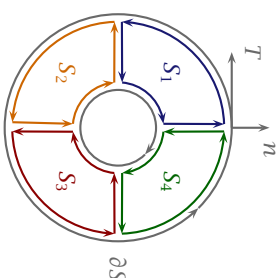
3.9 **Folgerung** Der Satz von Green

$$\int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx = - \int_{\partial S} f \cdot T ds$$

gilt auch in Greenschen Bereichen, wenn ∂S stückweise glatt so parametrisiert ist, dass

$$n = \begin{pmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{pmatrix} \quad \left(T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \right)$$

in jedem Punkt von ∂S aus S hinaus weist.



ZUM BEWEIS Green gilt in jedem S_j . Wegintegrale über gemeinsame Randteile heben sich weg. ■

3.10 **Satz von Gauß im \mathbb{R}^3** Sei $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^3)$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S \subseteq D$ Standardbereich, so dass bei jeder Projektion der untere und obere Rand Randflächen sind. Dann gilt

$$\int_S \nabla \cdot f dx = \int_{\partial S} f \cdot n d\sigma$$

wobei n der Normaleneinheitsvektor ist, der aus S hinaus weist.

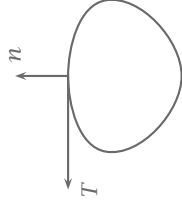
BEWEIS Sei S_3 Projektion von S in x_3 -Richtung.

$$\bar{S} = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x') \leq x_3 \leq \beta(x')\}$$

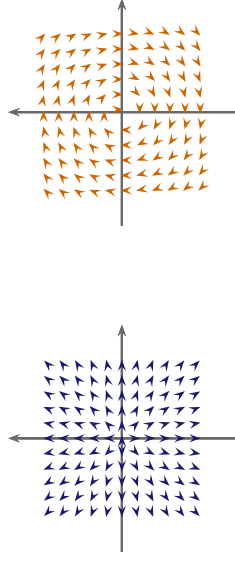
Zeige:

$$\int_S \partial_{x_3} f_3 dx = \int_{\partial S} f_3 \cdot n_3 d\sigma$$

n ist der Normaleneinheitsvektor, der ins Äußere von S zeigt: $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \Rightarrow n = \begin{pmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{pmatrix}$.



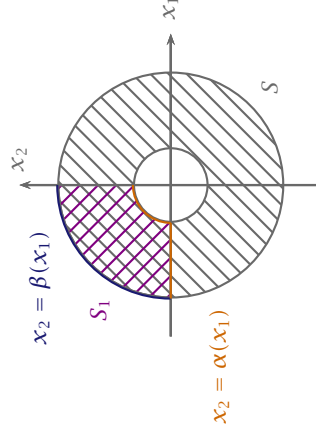
3.6 ▶ **Beispiel** $D = \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, S = K_1(0)$



$$\int_S \operatorname{div} f \, dx = \int_S 2a \, dx = 2a\pi = \int_{\partial S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot (n + 0) \, ds$$

$$\int_S (\partial_{x_2} f_1 - \partial_{x_1} f_2) \, dx = 2b\pi = - \int_{\partial S} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \cdot t \, ds$$

3.7 ▶ **Beispiel** S ist kein Standardbereich.



S_1 ist ein Standardbereich. S ist darstellbar als disjunkte Vereinigung von Standardbereichen.

BEWEIS Sei so ein $\varepsilon > 0$ fest. Annahme:

$$\exists w \in \mathbb{C} \exists \delta > 0 : K_\delta(w) \in \mathbb{C} \setminus f(K_{0,\varepsilon}(z_0))$$

Sei

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in K_{0,\varepsilon}(z_0)$$

$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ holomorph} \\ g \text{ beschränkt } |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{\delta} \end{array} \right.$

Riemannscher Hebbarkeitssatz: g fortsetzbar zu $\tilde{g} : K_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Fall 1:

$$\tilde{g}(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\tilde{g}} \text{ holomorph in } K_\varepsilon(z_0)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)} + w \text{ holomorph fortsetzbar in } z = z_0$$

$$\Rightarrow H = 0 \text{ \textit{z}}$$

Fall 2:

$\tilde{g}(z_0) = 0, K$ Ordnung der Nullstelle

a.) $K = \infty$: Dann $\tilde{g} = 0$ in $K_\varepsilon(z_0) \neq \tilde{g}(z) = \frac{1}{f(z) - w} \neq 0$ für $z \in K_{0,\varepsilon}(z_0)$

b.) $K \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{g}(z_0) = \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < \varepsilon$$

$$= (z - z_0)^K \sum_{n=K}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-K}$$

$$= (z - z_0)^K h(z), \quad h \text{ holomorph, } h(z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^K h(z)} \text{ für } 0 < |z - z_0| < \tilde{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)} + w \text{ hat Pol der Ordnung } K \text{ in } z_0 \neq \blacksquare$$

4.8 **Folgerung:** f hat Pol in $z_0 \iff |f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_0$. f hat wesentliche Singularität in z_0

$\iff f(K_\varepsilon(z_0))$ ist dicht in \mathbb{C} für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$

$\iff |f(z)|$ unbeschränkt, aber nicht bestimmt divergent² für $z \rightarrow z_0$

² $|f(z)|$ bestimmt divergent für $z \rightarrow z_0$

f hat hebbare Singularität in $z_0 \iff |f|$ beschränkt für $z \rightarrow z_0$

4.9 **Definition** Sei γ geschlossener Weg, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$. Dann heißt

$$\nu(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

die **Umlaufszahl** von γ um z_0 .

×

4.10 **Satz** $\nu(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z} \iff e^{2\pi i \nu(\gamma, z_0)}$. Sei

BEWEIS $\nu(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z} \iff e^{2\pi i \nu(\gamma, z_0)}$. Sei

$$\varphi(s) := \exp \left(\int_a^s \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt \right), \quad (\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C})$$

Zeige $\varphi(b) = 1$.

$$\varphi'(s) = \varphi(s) \frac{1}{\gamma(s) - z_0} \gamma'(s), \quad \text{für } s \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$$

$$\implies \frac{d}{ds} \left(\frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0} \right) = \frac{\varphi'(s) - \varphi(s) \gamma'(s)}{(\gamma(s) - z_0)^2} = 0, \quad \text{für } s \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$$

$$\implies \frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0} = \text{const auf Teilintervallen}$$

es existieren nur endliche viele Teilintervalle und $\frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0}$ ist stetig

$$\implies \frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z_0} = \text{const auf } [a, b]$$

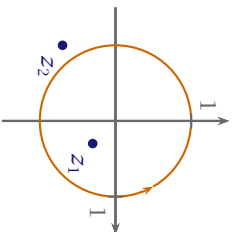
$$= \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z_0}$$

$$= \frac{1}{\gamma(a) - z_0}$$

$$\stackrel{s=b}{\implies} \varphi(b) = \frac{\gamma(b) - z_0}{\gamma(a) - z_0} = 1 \quad \text{da } \gamma(a) = \gamma(b)$$

■

4.11 **Beispiel** 1.) $\gamma_N : [0, N] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$



$$\iff |f(z)| \rightarrow \infty$$

$$\iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > M$$

$$\implies \int_{\partial S} \vartheta \cdot T_1 ds = \int_0^4 \vartheta(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \vartheta \left(\begin{matrix} a+t(b-a) \\ \alpha(a+t(b-a)) \end{matrix} \right) (b-a) dt + 0$$

$$+ \int_2^3 \vartheta \left(\begin{matrix} b+(t-2)(a-b) \\ \beta(b+(t-2)(a-b)) \end{matrix} \right) (a-b) dt + 0$$

$$= \int_a^b \vartheta \left(\begin{matrix} x_1 \\ \alpha(x_1) \end{matrix} \right) dx_1 - \int_a^b \vartheta \left(\begin{matrix} x_1 \\ \beta(x_1) \end{matrix} \right) dx_1$$

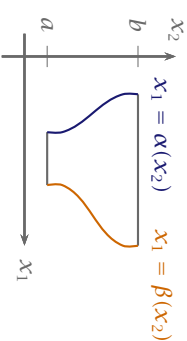
■

Andererseits

$$\int_S \partial_{x_2} \vartheta d(x_1, x_2) = \int_{x_1=a}^b \int_{x_2=\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} \partial_{x_2} \vartheta(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

$$= \int_{x_1=a}^b (\vartheta(x_1, \beta(x_1)) - \vartheta(x_1, \alpha(x_1))) dx_1$$

Für Gleichung (*) genauso, aber ∂S in andere Richtung parametrisieren



3.5 **Folgerungen:** Voraussetzungen wie in 8.4, aber $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^2)$

1.) Satz von Green:

$$\int_S (\partial_{x_2} f_1 - \partial_{x_1} f_2) dx = - \int_{\partial S} f \cdot T ds$$

$$\stackrel{8.4}{=} - \int_{\partial S} f_1 \cdot T_1 ds - \int_{\partial S} f_2 \cdot T_2 ds$$

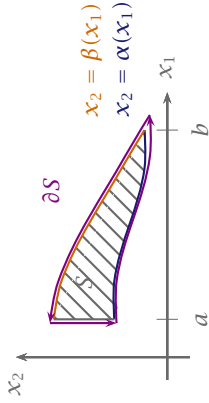
2.) Satz von Gauß in der Ebene

$$\int_S \text{div } f dx = \int_{\partial S} f \cdot n ds$$

—

wobei $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ der Tangentenvektor ist.

BEWEIS Vorüberlegung



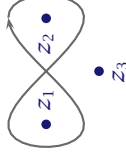
Parameterdarstellung von ∂S :

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} a+t(b-a) \\ \alpha(a+t(b-a)) \end{pmatrix} & 0 \leq t < 1 \\ \begin{pmatrix} b \\ \alpha(b) + (t-1)(\beta(b) - \alpha(b)) \end{pmatrix} & 1 \leq t < 2 \\ \begin{pmatrix} b+(t-2)(a-b) \\ \beta(b+(t-2)(a-b)) \end{pmatrix} & 2 \leq t < 3 \\ \begin{pmatrix} a \\ \beta(a) + (t-3)(\alpha(a) - \beta(b)) \end{pmatrix} & 3 \leq t < 4 \end{cases} \\
 \Rightarrow \gamma'(t) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} b-a \\ \dots \end{pmatrix} & 0 < t < 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} & 1 < t < 2 \\ \begin{pmatrix} a-b \\ \dots \end{pmatrix} & 2 < t < 3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} & 3 < t < 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$v(\gamma_N, 0) = N \implies v(-\gamma_N, 0) = -N$$

$$v(\gamma_N, z_1) = N \text{ falls } |z_1| < 1 \text{ (} \gamma_N \text{ in } \mathbb{C} \setminus \{z_1\} \text{)}, \tilde{g}_N : t \mapsto z_1 + e^{2\pi i t}, \text{ dasselbe Integral)}$$

$$v(\gamma_N, z_2) = 0 \text{ falls } |z_2| > 1, \text{ da } \gamma_N \text{ nullhomotop in } \mathbb{C} \setminus \{z_2\}$$



2.)

$$v(\gamma, z_j) = \begin{cases} 0 & j = 3 \\ 1 & j = 1 \\ -1 & j = 2 \end{cases}$$

4.12 **Satz** Sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

und γ geschlossener Weg in $K_{0,R}(z_0)$. Dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1} v(\gamma, z_0)$$

BEWEIS

$$\begin{aligned}
 g(z) &:= f(z) - a_{-1} (z - z_0)^{-1} \\
 &:= \sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n
 \end{aligned}$$

Dann ist

$$G(z) := \sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion in $K_{0,R}(z_0)$

$$\implies \int_{\gamma} g(z) dz = G(\text{Endpunkt}) - G(\text{Anfangspunkt}) = 0$$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{\int_{\gamma} g(z) dz}_{=0} + a_{-1} \underbrace{\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz}_{=v(\gamma, z_0) 2\pi i}$$

4.13 **Definition** Sei f holomorph in O mit isolierter Singularität z_0 und der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{4.12}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz, \quad \text{für } 0 < r < R$$

Residuum von f in z_0 .

✕

4.14 ▶ **Beispiel**

1.)

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \underbrace{\frac{(-1)^0}{1!}}_{=a_{-1}} z^{-1} + \frac{(-1)^1}{3!} z^1 + \frac{(-1)^2}{5!} z^3 + \dots \\ \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^2}, 0\right) &= \frac{(-1)^0}{1!} = 1 \end{aligned}$$

2.)

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \\ \Rightarrow \operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) &= 1 \end{aligned}$$

3.)

$$e^{1/z^2} = \frac{1}{0!} z^0 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \dots$$

es gibt hier kein z^{-1} , also $a_{-1} = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{1/z^2}, 0) = 0$$

▶

4.15 **Residuensatz** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in $O \setminus S$, es gelte

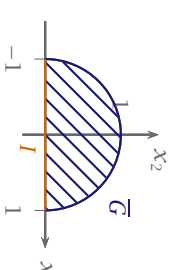
$\forall z \in S : f$ hat in z eine isolierte Singularität

und γ sei ein C^1 -nullhomotoper Weg in O , $\operatorname{Bild}(\gamma) \cap S = \emptyset$. Dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z \in S} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z) \nu(\gamma, z)$$

und die Summe hat nur endlich viele Summanden $\neq 0$.

Beweis Schritt 1: Zeige, dass nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind.



\overline{G} ist projizierbar in x_2 -Richtung

$$I =]-1, 1[$$

$$\tilde{\alpha}(x_1) = 0$$

$$\tilde{\beta}(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_S x_2 x_3 dx &= \int_{\overline{G}} \left(\int_0^{2-x_2^2} x_2 x_3 dx_3 \right) d(x_1, x_2) \\ &= \int_{\overline{G}} x_2 \frac{x_3^2}{2} \Big|_{x_3=0}^{2-x_2^2} d(x_1, x_2) \\ &= \int_{\overline{G}} \frac{1}{2} x_2 (2 - x_2^2)^2 d(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\overline{G}} \int_0^{\sqrt{1-x_2^2}} x_2 (2 - x_2^2)^2 dx_1 d(x_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\overline{G}} \left. -\frac{1}{6} (2 - x_2^2)^3 \right|_0^{\sqrt{1-x_2^2}} dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\overline{G}} \frac{8}{6} - \frac{1}{6} (1 + x_1^2)^3 dx_1 \\ &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 (7 - x_1^6 - 3x_1^4 - 3x_1^2) dx_1 \\ &= \frac{1}{12} \left(14 - \frac{2}{7} - \frac{6}{5} - 2 \right) \end{aligned}$$

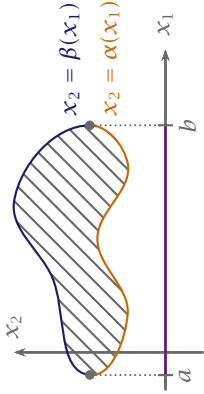
▶

3.4 **Integralsatz im \mathbb{R}^2** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Standardbereich, dann sei $f, g \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$, D offen und $\overline{S} \subseteq D$. Bei der projizierten Darstellung in x_1 - bzw. x_2 -Richtung seien α, β stückweise glatt. ∂S werde im Gegenuhreigersinn¹ durchlaufen. Dann

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial S} f dx_2 = \right) \int_{\partial S} f \cdot T_2 ds &= - \int_{\partial x_1} f d(x_1, x_2) \\ \left(\int_{\partial S} g dx_1 = \right) \int_{\partial S} g \cdot T_1 ds &= - \int_{\partial x_2} g d(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (*)$$

¹Neologismus von PD Dr. Lesky, eigentlich: »gegen den Uhrzeigersinn«

z.B. $n = 2$. Die Funktion ist projizierbar in x_2 -Richtung, aber nicht in x_1 -Richtung.



3.2 **Bemerkung:** Ist S projizierbar in x_n -Richtung und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit

$$\int_S |f| \, dx < \infty$$

so folgt aus dem Satz von Fubini:

1.) $f(x', \cdot) : [\alpha(x'), \beta(x')] \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar für fast alle $x' \in G$

2.) fast überall ist

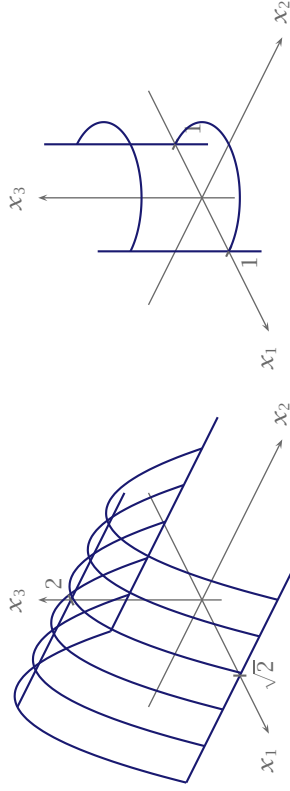
$$F(x') = \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', x_n) \, dx_n$$

definiert

3.)

$$\int_S f \, dx = \int_G \int_{x_n=\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x', x_n) \, dx_n \, dx'$$

3.3 **Beispiel** $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq 2 - x_2^2 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Vorstellung: Schnitt von



S ist projizierbar in x_3 -Richtung:

$$G = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 < 1\}_{(x_1, x_2) \in G}$$

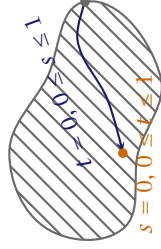
$$\alpha(x_1, x_2) = 0 \quad \beta(x_1, x_2) = 2 - x_2^2 > 2 - 1 > \alpha(x_1, x_2)$$

a.) Für alle hebbarren Singularitäten z gilt $\text{Res}(f, z) = 0$

$$\Rightarrow \sum_s \dots = \sum_{s'} \dots$$

mit $S' = \{z \in S : f \text{ hat in } z \text{ eine wesentliche Singularität, oder einen Pol}\}$.

b.) Sei Φ die Homotopie zwischen γ und einem konstanten Weg.



$\text{Bild}(\Phi)$ ist kompakt (Φ ist stetig, $[0, 1] \times [0, 1]$ ist kompakt).

Behauptung: In $\text{Bild}(\Phi)$ liegen nur endlich viele isolierte Singularitäten.

Annahme: Es gibt mindestens abzählbar viele isolierte Singularitäten.

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\Phi) \text{ kompakt} &\Rightarrow \exists \text{ Häufungspunkt } z_0 \in \text{Bild}(\Phi). \\ \text{Sei } (z_n) &\text{ Folge in } S', z_n \rightarrow z_0, z_n \neq z_0. \end{aligned}$$

$$\stackrel{4.8}{\Rightarrow} \exists (\tilde{z}_n) \in O : |\tilde{z}_n - z_n| \leq \frac{1}{n} \wedge |f(\tilde{z}_n)| \geq n$$

$$\Rightarrow \tilde{z}_n \rightarrow z_0 \wedge |f(\tilde{z}_n)| \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{4.8}{\Rightarrow} f \text{ hat in } z_0 \text{ einen Pol oder eine wesentliche Singularität}$$

$$\dot{z}(z_n \rightarrow z_0 \text{ und } z_0 \text{ ist isolierte Singularität}).$$

c.) Für $z_0 \in S' \setminus \text{Bild}(\Phi)$ gilt $v(y, z_0) = 0$. Setze

$$g(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

$$\text{Bild}(\Phi) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

$\Rightarrow \Phi$ ist eine Homotopie zwischen γ und einer

konstanten Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

$$\begin{aligned} \gamma \text{ nullhomotop} &\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \, dz = 0 \\ &\Rightarrow v(y, z_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{z \in S'} \dots = \sum_{z \in S'} \dots \stackrel{b}{=} \text{endliche Summe.} \quad S'' = S' \cap \text{Bild}(\Phi)$$

Schritt 2: $S' = \{z_1, \dots, z_n\}$, H_j Hauptteil in z_j . Sei

$$g(z) := f(z) - H_j(z)$$

holomorph in $O \setminus S$

$\Rightarrow g$ hat in $\text{Bild}(\Phi)$ nur hebbare Singularitäten.

\Rightarrow Es existiert eine holomorphe Fortsetzung \tilde{g} in einer offenen Umgebung U von $\text{Bild}(\Phi)$.

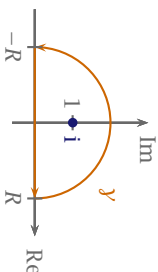
$$\begin{aligned} \gamma \text{ nullhomotop in } U_f &\Rightarrow \int_{\gamma} g \, dz = \int_{\gamma} \tilde{g}(z) \, dz = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) \, dz &= \underbrace{\int_{\gamma} g(z) \, dz}_{=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \int_{\gamma} H_j(z) \, dz}_{4\pi i^2 \pi \text{iv}(\gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j)} \end{aligned}$$

■

4.16 ▶ Beispiel

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \, dz$$



$S = \{\pm i\}$, $\nu(\gamma, -i) = 0$. Berechne $\text{Res}(f, i)$

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz}}{1+z^2} &= \frac{e^{iz}}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \\ &= \frac{e^{iz}}{2i} \frac{1}{z-i} + \text{etwas Holomorphes für } z \neq -i \end{aligned}$$

$\frac{e^{iz}}{2i} \frac{1}{z-i}$ hat in $z = i$ einen Pol der Ordnung 1.

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{e^{iz}}{2i} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i} \\ \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \, dz &= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1} \end{aligned}$$

▶

4.17 **Residuenberechnung** 1.) Falls f in z_0 einen Pol der Ordnung K hat:

$$f(z) = \sum_{n=-K}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < r, a_{-K} \neq 0.$$

$$\partial_{x_1} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{x_2} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\|\partial_{x_1} f \times \partial_{x_2} f\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \neq 0$$

$$|F| = \int_{|x| < \sqrt{2}} \sqrt{1+4|x|^2} \, dx$$

Transformation auf Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx = r \, dr \, d\varphi$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} \, r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{12} (1+4r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{12} (27-1) \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{13}{6} \, d\varphi$$

$$= \frac{13}{3} \pi$$

▶

2.3 Volumenintegrale und Integralsätze

3.1 **Definition** Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in x_n -Richtung, falls es ein beschränktes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und $\alpha, \beta \in C(\bar{G} \rightarrow \mathbb{R})$ mit $\alpha(x') \leq \beta(x')$ für $x' \in G$ gibt, sodass

$$S = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in G \wedge \alpha(x') \leq x_n \leq \beta(x')\}$$

Ist S projizierbar in jede x_j -Richtung ($j = 1, \dots, n$), so heißt S **Standardbereich**.

✕

2.) Der **Normaleneinheitsvektor** im Punkt $f(x)$ an die Fläche F ist gegeben durch

$$n(x) = \frac{\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)}{\|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\|}$$

2.5 **Bemerkung:** $\|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $\partial_{x_1} f(x)$ und $\partial_{x_2} f(x)$ aufgespannt wird.

2.6 **Definition** Sei (f, \bar{D}) Parameterdarstellung einer Fläche F und $g \in C(\bar{D} \rightarrow \mathbb{R})$.

1.)

$$|F| = \int_{\bar{D}} \|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\| dx$$

heißt **Flächeninhalt der Fläche F** .

2.)

$$\int_{\bar{D}} g(f(x)) \cdot \|\partial_{x_1} f(x) \times \partial_{x_2} f(x)\| dx = \int_F g d\sigma$$

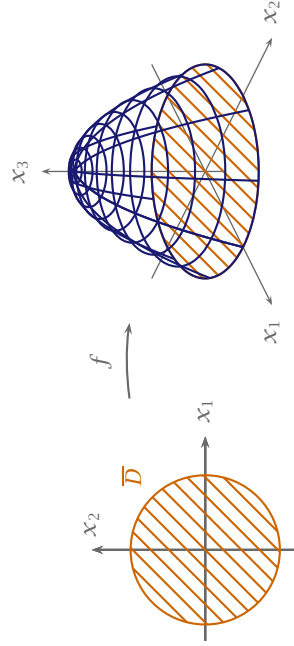
heißt **Integral von g über F** . Offensichtlich

$$\int_F 1 d\sigma = |F|$$

2.7 **Beispiel**

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \sqrt{2}\}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$



a.) $K = 1$:

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{n \rightarrow -1} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

b.) $K \geq 2$:

$$\frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} ((z - z_0)^K f(z)) = \sum_{n=-1}^{\infty} (n + K) \dots (n + 2) a_n (z - z_0)^{n+1}$$

$$\rightarrow (-1 + K)(-1 + K - 1) \dots (-1 + 2) a_{-1} \text{ für } z \rightarrow z_0$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(K-1)!} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} ((z - z_0)^K f(z))$$

2.) Falls $f = g/h, g, h$ holomorph, $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$, dann hat f in z_0 einen Pol erster Ordnung. Sei

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ h'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist φ holomorph im Definitionsbereich von h .

$$\Rightarrow f(z) = (z - z_0) \varphi(z)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z - z_0} \varphi(z)$$

$$\stackrel{K=1}{\Rightarrow} \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{g(z_0)}{\varphi(z_0)}$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

4.18 **Beispiel** 1.) $f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + z^2}, z_0 = i$.

$$\stackrel{4.17}{\Rightarrow} \text{Res}(f, i) = \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}$$

2.) Berechne

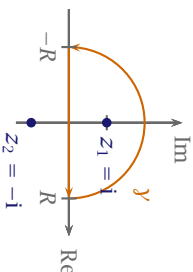
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\left| \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx \text{ absolut konvergent}$$

Betrachte $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$, denn $\operatorname{Re} f(x) = \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.



$$\operatorname{Res}(f, i) \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{4!} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2 e^{iz}}{(1+z^2)^2} \right) \Big|_{z=i}$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right) \Big|_{z=i}$$

$$= \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - e^{iz}2(z+i)}{(z+i)^4} \Big|_{z=i}$$

$$= \frac{ie^{-1}2i - 2e^{-1}}{(2i)^3} = -i \frac{e^{-1}}{2}$$

Residuensatz

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left(-i \frac{e^{-1}}{2} \right) = \frac{\pi}{e}$$

2.2 Flächenintegrale im \mathbb{R}^3

2.1 **Definition** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f \in C^1(\bar{D}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f|_D$ injektiv und

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_2} f_2 \\ \partial_{x_1} f_3 & \partial_{x_2} f_3 \end{pmatrix} = 2$$

für $x \in \bar{D}$. Dann heißt

$$F = \operatorname{Bild}(f)$$

Fläche im \mathbb{R}^3 . (f, \bar{D}) heißt Parameterdarstellung von F .

2.2 **Satz** Ist $(\gamma, [a, b])$ Parameterdarstellung einer glatten Kurve in $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$, so ist $(f \circ \gamma, [a, b])$ eine glatte Kurve im \mathbb{R}^3 .

BEWEIS 1.) $\gamma \in C^1, f \in C^1 \Rightarrow f \circ \gamma \in C^1$.

2.)

$$(f \circ \gamma)'(t) = \begin{pmatrix} (f_1 \circ \gamma)'(t) \\ (f_2 \circ \gamma)'(t) \\ (f_3 \circ \gamma)'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\partial_{x_1} f_1) \gamma_1' + (\partial_{x_2} f_1) \gamma_2' \\ (\partial_{x_1} f_2) \gamma_1' + (\partial_{x_2} f_2) \gamma_2' \\ (\partial_{x_1} f_3) \gamma_1' + (\partial_{x_2} f_3) \gamma_2' \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_1'(t) \partial_{x_1} f(\gamma(t)) + \gamma_2'(t) \partial_{x_2} f(\gamma(t)) \neq 0$$

da $\{\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f\}$ linear unabhängig und $\begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} \neq 0$. ■

2.3 **Folgerung:** Der Tangenteneinheitsvektor von $f \circ \gamma$ an der Stelle $t_0 \in [a, b]$:

$$T_{f \circ \gamma}(t_0) = \frac{(f \circ \gamma)'(t_0)}{\|(f \circ \gamma)'(t_0)\|} = c_1 \partial_{x_1} f(\gamma(t_0)) + c_2 \partial_{x_2} f(\gamma(t_0))$$

liegt immer in der von $\{\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f\}$ aufgespannten Ebene durch $f(\gamma(t_0))$.

2.4 **Definition** Sei (f, \bar{D}) Parameterdarstellung einer Fläche F .

1.) Für $x \in D$ heißt die Ebene

$$\{f(x) + t \partial_{x_1} f(x) + s \partial_{x_2} f(x) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

die *Tangentialebene* an F im Punkt $f(x)$.

mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'_j(t)$$

mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$\int_K f \cdot T \, ds = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

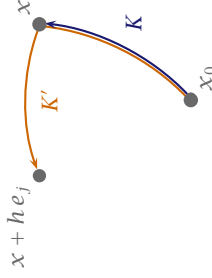
1.27 **Satz** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Ist das Wegintegral über stückweise glatte Kurven in D wegunabhängig, so besitzt f ein Potential in D .

BEWEIS Sei $x_0 \in D$ fest. Zu $x \in D$ wähle eine Kurve K von x_0 nach x , setze

$$F(x) := \int_K f \cdot T \, ds$$

Da das Integral wegunabhängig ist, ist F sinnvoll definiert. Sei $j = \{1, \dots, n\}$, $x \in D$.

Vorüberlegung



$$\begin{aligned} F(x + h e_j) - F(x) &= \int_x^{x+h e_j} f \cdot T \, ds \\ &= \int_0^h f(x + t e_j) \cdot e_j \, dt \\ &= \int_0^h f_j(x + t e_j) \, dt \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{h}(F(x + h e_j) - F(x)) - f_j \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{(f_j(x + t e_j) - f_j(x))}_{|t| < \varepsilon \text{ für } |h| < \delta} dt \right| < \frac{1}{h} \varepsilon h = \varepsilon \text{ für } |h| < \delta$$

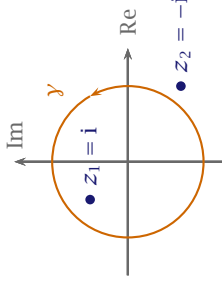
Für $|z| = R$, $\text{Im } z \geq 0$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{e^z}{(1+z^2)^2} \right| = \frac{e^{-\text{Im } z}}{|1+z^2|^2} \stackrel{|z^2+1| \geq ||z^2|-1|}{\leq} \frac{1}{|1+z^2|^2} = \frac{1}{(R^2-1)^2} \\ \Rightarrow \int_{|z|=R, \text{Im } z > 0} f(z) \, dz &\leq \max |f| L(\gamma) \leq \frac{1}{(R^2-1)^2} \pi R \rightarrow 0, \quad (R \rightarrow \infty) \\ \Rightarrow \frac{\pi}{e} &= \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(1+x^2)^2} dx \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

4.19 **Definition** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein geschlossener Weg γ in \mathbb{C} berandet G , falls

$$\nu(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & z \in G \\ 0 & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G} \end{cases}$$

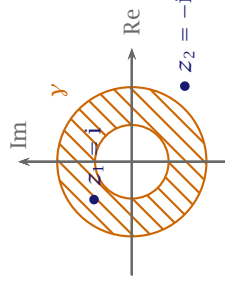
► **Beispiel** 1.) $G = K_1(0)$, $\gamma_N(t) = e^{2\pi i t N}$, $0 \leq t \leq 1$.



$\nu(\gamma, z_1) = 1$, falls $|z_1| < 1$ und $\nu(\gamma, z_2) = 0$, falls $|z_2| > 1$.

γ_1 berandet G , γ_N berandet G nicht.

2.) $G = K_{1,2}(0)$

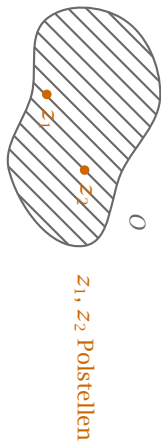


Der Rand besteht aus zwei disjunkten Wegen (Zykel). Deshalb greift hier unsere Definition nicht.

4.20 **Definition** Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph in $O \setminus S$ (insbesondere $O \setminus S$ offen) und $\forall z \in S : f$ hat einen Pol in z .

Dann heißt f meromorph in O .

X



4.21 **Null- und Polstellen zählendes Integral** Sei f meromorph in O , G ein Gebiet, $\bar{G} \subset O$ und γ ein Weg in O der G berandet und keine Null- oder Polstelle trifft. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_G - P_G$$

wobei N_G die Anzahl der Nullstellen von f in G und P_G die Anzahl der Pole von f in G bezeichnet, jeweils mit Ordnung gezählt.

BEWEIS Sei $S = \{z \in O : f(z) = 0 \vee f \text{ hat Pol in } z\}$. Dann besteht S nur aus isolierten Punkten (Nullstellen nach 3.10, Polstellen nach Definition).

$$g := \frac{f'}{f} \text{ ist holomorph in } O \setminus S$$

Nach dem Residuensatz ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= \sum_{z \in S} 2\pi i \operatorname{Res}(g, z) = \sum_{z \in S \cap G} \underbrace{\gamma(z)}_{=1} \operatorname{Res}(g, z) = \sum_{z \in S \cap G} 2\pi i \operatorname{Res}(g, z) \\ &= \begin{cases} 1 & z \in G \\ 0 & z \in O \setminus G \end{cases} \end{aligned}$$

Betrachte einen einzelnen Summanden, bzw. ein $z_0 \in S \cap G$ und schreibe:

$$f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z) \quad \tilde{f}(z_0) \neq 0$$

mit holomorphem \tilde{f} . Für $k \geq 1$ ist k die Ordnung der Nullstelle und für $k \leq -1$ ist $-k$ die Ordnung des Pols.

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} \tilde{f}(z) + (z - z_0)^k \tilde{f}'(z)$$

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$$

holomorph bei z_0

Damit ist

$$\operatorname{Res}(g, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) g(z) = k$$

Betrachtet man nun wieder die Summe, so ergibt sich sofort die Behauptung. ■

1.24 **Definition** Sei K eine glatte Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $K \subseteq D$. Dann heißt

$$\int_K f \cdot T ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

das Wegintegral von f über K .

X

1.25 **Bemerkung:** 1.) Die Definition ergibt durchaus ihren Sinn, denn aus der Definition des bekanntesten Kurvenintegrals erhält man:

$$\int_K f \cdot T ds = \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

2.) Das Wegintegral wird in der Physik auch als Arbeitsintegral bezeichnet.

$$W = \int F(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t} dt$$

3.) Andere Schreibweise

$$\begin{aligned} \int_K f \cdot T ds &= \sum_{j=1}^n \int_K f_j dx_j \\ \int_K f_j dx_j &= \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) dt \end{aligned}$$

-

1.26 **Satz** Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld mit Potential $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt für jede Kurve $K \subseteq D$

$$\int_K f \cdot T ds = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt})$$

Insbesondere: Wegintegral ist wegunabhängig.

BEWEIS Betrachte

$$\int_K f \cdot T ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

wobei $f(\gamma(t)) = \nabla F(\gamma(t))$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt$$

2.) Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D offen, f differenzierbar. Dann heißt

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$$

Gradient von f . Man nennt f auch **Skalarfeld**.

3.) Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und D offen. Gibt es eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla F = f \text{ in } D$$

so heißt f **Gradientenfeld**, F heißt **Potential** von f .

4.) Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, f differenzierbar. Dann heißt

$$\text{rot } f = \nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix}$$

Rotation von f (Wirbelstärke).

1.23 **Rechenregeln:** Seien im Folgenden $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_3, g_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfelder, $a, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfelder und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare.

1.) Linearität:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla \cdot f + \mu \nabla \cdot g \\ \nabla (\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla f + \mu \nabla g \\ \nabla \times (\lambda f_3 + \mu g_3) &= \lambda \nabla \times f_3 + \mu \nabla \times g_3 \end{aligned}$$

2.) Produktregeln:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a f) &= (\nabla a) \cdot f + a \nabla \cdot f \\ \nabla (a b) &= a \nabla b + b \nabla a \\ \nabla \times (a f_3) &= a (\nabla \times f_3) + (\nabla a) \times f_3 \end{aligned}$$

3.)

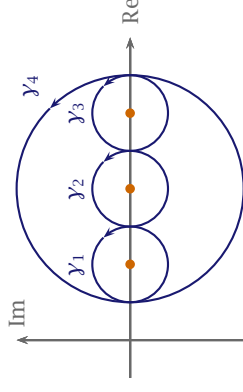
$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f_3) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times f_3) &= 0 \end{aligned}$$

∞

4.22 ▶ **Beispiel**

$$f(z) = \frac{(z-2)(z-3)}{(z-1)^2}$$

ist meromorph in \mathbb{C} .



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} -2 & j = 1 \\ 1 & j = 2, 3 \\ 0 & j = 4 \end{cases}$$



4.23 **Folgerung (Null- und Polstellen zählendes Integral 2)** Seien die Voraussetzungen wie in 4.21. Dann gilt

$$N_G - P_G = \nu(f \circ \gamma, 0)$$

BEWEIS Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, dann gilt nach 4.21:

$$\begin{aligned} N_G - P_G &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \underbrace{\frac{1}{f(\gamma(t))}}_{= \frac{1}{f \circ \gamma}} \underbrace{f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}_{= (f \circ \gamma)'} \end{aligned}$$

(wobei das Integral evtl. eine Summe über Teilintervalle ist)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz \\ &= \nu(f \circ \gamma, 0) \end{aligned}$$



4.24 **Satz von Rouché** Seien f, g holomorph in O , $G \subseteq O$ berandet vom Weg γ in O . Gilt

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ für } z \in \text{Bild}(\gamma)$$

dann haben f und $f+g$ gleich viele Nullstellen in G (die Nullstellen mit Ordnung gezählt).

BEWEIS Mit 4.23

$$N_G(f) = \nu(f \circ \gamma, 0)$$

$$N_G(f + g) = \nu((f + g) \circ \gamma, 0)$$

Zeige, dass $f \circ g \sim (f + g) \circ \gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

γ muss eventuell umparametrisiert werden, damit $\gamma \in C^1$.

$$\Phi(t, s) := (f \circ \gamma)(t) + s(g \circ \gamma)(t)$$

dann

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\in C^1([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}) \\ \Phi(t, 0) &= (f \circ \gamma)(t) \\ \Phi(t, 1) &= ((f + g) \circ \gamma)(t) \\ \Phi &\in \text{Bild}(\Phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{fertig}$$

Zu (*):

$$\begin{aligned} |(f \circ \gamma)(t) + s(g \circ \gamma)(t)| &= |f(\gamma(t)) + s g(\gamma(t))| \\ &\geq |f(\gamma(t))| - s |g(\gamma(t))| \end{aligned}$$

da $0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} &\geq |f(\gamma(t))| - |g(\gamma(t))| \\ &\geq 0 \text{ nach Vereinbarung.} \end{aligned}$$

Folgerung Sei

$$p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Dann hat p in $\overline{K_R(0)}$ mit

$$R := \max \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|, 1 \right\}$$

genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Dies sind alle Nullstellen von p .

BEWEIS Seien

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n & g(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \\ \Rightarrow f + g &= p \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\begin{aligned} & \int_{0=L(a)}^{s=L(t)} f(\varrho(L(t))) \| \gamma'(t) \| dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \| dt \end{aligned}$$

1.20 **Beispiel** 1.) $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1: t \mapsto t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= [a, b] \\ \Rightarrow \int_K f ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) 1 dt \end{aligned}$$

Also: Kurvenintegral beinhaltet »altes« Integral über Intervalle.

2.) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\int_K f ds = \int_0^1 (t^2 + a^2 t^2) \sqrt{1 + a^2} dt = \frac{1}{3} (1 + a^2)^{3/2}$$

1.21 **Eigenschaften von Kurvenintegralen:** 1.) Linearität:

$$\int_K (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_K f ds + \mu \int_K g ds$$

2.) **Standardabschätzung:**

$$\left| \int_K f ds \right| \leq \max_{x \in K} |f(x)| L(K)$$

3.) Sei $K = K_1 \cup K_2$, dann

$$\int_K f ds = \int_{K_1} f ds + \int_{K_2} f ds$$

1.22 **Definition** 1.) Seien $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, D offen, f differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j$$

*Divergenz von f (Quellenstärke). In diesem Zusammenhang heißt f auch **Vektorfeld**.*

1.17 **▶ Beispiel** Sei eine Kurve durch die Parametrisierung γ gegeben:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \|\gamma'(t)\| &= \left\| r \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi t) \\ 2\pi \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \right\| = 2\pi r \\ \Rightarrow L(t) &= \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = 2\pi r t = s \\ \Rightarrow L^{-1}(s) &= t = \frac{s}{2\pi r} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Bogenlängendarstellung:

$$g(s) = \gamma(L^{-1}(s)) = r \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{r} \\ \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi r$$

1.18 **Definition** Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit Bogenlängendarstellung $(g, [0, L(K)])$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq D$. Dann heißt

$$\int_K f ds = \int_0^{L(K)} f(g(s)) ds$$

Kurvenintegral von f über K .

1.19 **Satz** Sei K eine glatte, rektifizierbare Jordan-Kurve, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $K \subseteq D$ und $(\gamma, [a, b])$ die Parameterdarstellung von K . Dann

$$\int_K f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

BEWEIS

$$\int_K f ds = \int_0^{L(K)} f(g(s)) ds$$

Nebenrechnung

$$g = \gamma \circ L^{-1}$$

Substitution: $s = L(t)$

$$\frac{ds}{dt} = L'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

f hat die n -fache Nullstelle $z_0 = 0$ und sonst keine in jeder Kreisscheibe $G = K_r(0)$ mit $r > 0$. Sei nun $r > R$. Zeige

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \text{für } |z| = r.$$

Dann folgt aus Rouché (4.24) die gesamte Behauptung.

$P_N(f + g) = P_N(f) = n$ in jedem $K_r(0)$ mit $r > R$

$$|g(z)| \stackrel{|z|=r}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k$$

aus $r > R \geq 1$ folgt $r^k \leq r^{n-1}$

$$\leq \sum_{\substack{k=0 \\ \leq R < r}}^{n-1} |a_k| r^{n-1}$$

$$< r^n = |f(z)|$$

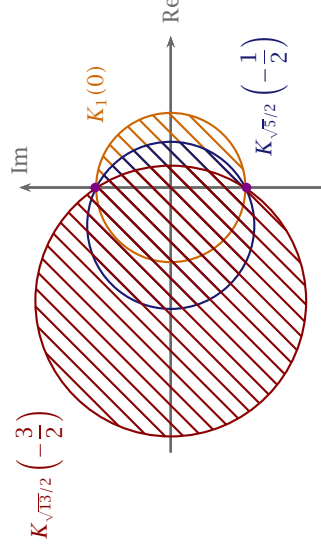
1.5 Analytische Fortsetzung

5.1 **▶ Beispiel** Betrachte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \quad \text{für } |z| < 1$$

und $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ (geometrische Reihe). Sei

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{für } z \neq \pm i$$



Entwickle f um $z = -1/2$ in eine Potenzreihe

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n$$

Wir wissen: $f = g$ in $K_1(0)$, also ist f_1 gleichzeitig Entwicklung von g .

$\Rightarrow f_1$ hat den Konvergenzradius $r_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Entwickle f_1 um $z_2 = -\frac{3}{2}$:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_2)^n \quad \text{in } K_{r_2}(z_2)$$

mit $r_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (da f_2 Entwicklung von g ist). Wir haben f , das nur auf $K_1(0)$ definiert ist holomorph auf $K_1(0) \cup K_{\sqrt{5}/2}(-1/2) \cup K_{\sqrt{13}/2}(-3/2)$ fortgesetzt. ▶

5.2 **Definition** Ein Tupel $\mathcal{K} = (K_0, \dots, K_n)$ offener Kreisscheiben $K_j = K_{r_j}(z_j)$ heißt **Kreis-kette**, falls

$$z_j \in K_{j-1} \vee z_{j-1} \in K_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Sind $f_j : K_j \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$f_j \Big|_{K_j \cap K_{j-1}} = f_{j-1} \Big|_{K_j \cap K_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, n$$

so heißt f_0 **analytisch fortsetzbar** längs \mathcal{K} , f_n heißt **analytische Fortsetzung** von f_0 längs \mathcal{K} . ✕

5.3 **Bemerkung:** 1.) Nach dem Identitätssatz ist f_1 und dann auch f_2, \dots, f_n eindeutig.

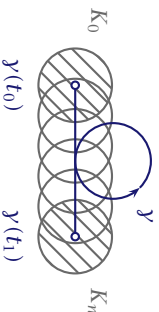
2.) Sind $(K_0, \dots, K_n), (\tilde{K}_0, \dots, \tilde{K}_m)$ Kreisketten mit $\tilde{K}_0 = K_0$ und $\tilde{K}_m = K_n$, gilt dann $f_m = f_n$? (Im Allgemeinen nein) ↪

5.4 **Definition** Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C})$. Eine **Kreis-kette** $\mathcal{K} = (K_0, \dots, K_n)$ verläuft **längs** γ , falls es eine Unterteilung $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < t_1$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} \gamma(\tau_j) &\text{ Mittelpunkt von } K_j, \quad j = 0, \dots, n \\ \gamma([\tau_{j-1}, \tau_j]) &\subseteq K_{j-1} \cap K_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

✕

Die zweite Bedingung verhindert, dass γ wie im Bild aus der Kreis-kette hinausläuft.



3.) Rechtsseitige Stetigkeit bei $t = a$: Wie 1., aber K_1 anstelle von K_n :

$$0 \leq L(K_1) - \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0 = a)\| \leq \dots \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow L(K_1) < \varepsilon$$

4.) Für $t \in [a, b]$ betrachte $\gamma([t, b])$, wende 3. an $\Rightarrow L$ rechtsseitig stetig in t .

3.) Klar.

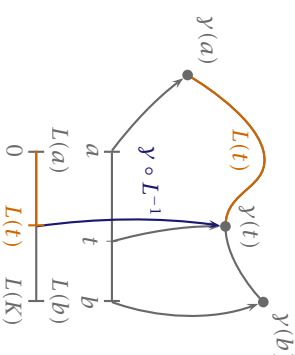
$$4.) L(t) \stackrel{1.15}{=} \int_a^t \underbrace{\|\gamma'(\tau)\|}_{\text{stetig}} d\tau \Rightarrow L'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

■

1.15 **Definition** Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$. Dann heißt

$$(g, [0, L(K)]), \quad \text{mit } g(s) := \gamma(L^{-1}(s))$$

Bogenlängendarstellung von K (äquivalente Parameterdarstellungen führen auf dieselbe Bogenlängendarstellung).



Beide **orangenen** Linien sind gleich lang. ✕

1.16 **Folgerung:** Falls K glatt und γ differenzierbar folgt aus 1.15 4.), dass L differenzierbar ist. Wegen

$$(L^{-1})'(s) = \frac{1}{L'(L^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(L^{-1}(s))\|} \neq 0, \text{ da } K \text{ glatt ist}$$

ergibt sich für die Bogenlängendarstellung von K

$$\|\theta'(s)\| = \|\gamma'(L^{-1}(s))\| L^{-1}'(s) = 1$$

↪

- 1.) L ist streng monoton wachsend
- 2.) L ist stetig
- 3.) $\text{Bild}(L) = [0, L(K)]$
- 4.) Falls K glatt ist und $\gamma \in C^1$, dann ist L differenzierbar und

$$L'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

BEWEIS 1.) Sei $a \leq t < s \leq b$.

$$L(s) \stackrel{1.12}{=} L(t) + L(K'), \quad K' = \gamma([t, s])$$

$$L(K') \geq \|\gamma(s) - \gamma(t)\| > 0$$

da K Jordan-Kurve und s, t nicht zugleich Anfangs- und Endpunkt.

- 2.) 1.) Zeige: L ist stetig in $t = b$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit $L_{(t_0, \dots, t_n)}(K) > L(K) - \varepsilon$ (*). γ ist gleichmäßig stetig, wenn gilt

$$\exists \delta > 0 : |s - t| < \delta \implies \|\gamma(s) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$

Setze $K_j = \gamma([t_j, t_{j-1}])$

$$\stackrel{1.12}{\implies} \sum_{j=1}^n L(K_j) = L(K)$$

$$\implies 0 \leq L(K_n) - \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^n (L(K_j) - \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|)}_{\geq 0}$$

$$= L(K) - L_{(t_0, \dots, t_n)}(K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

O.B.d.A. kann angenommen werden:

$$|t_j - t_{j-1}| < \delta$$

Andernfalls füge geeignete weitere Unterteilungspunkte hinzu. Da dabei $L_{(i, i+1)}(K)$ höchstens größer wird bleibt (*) erhalten.

$$\begin{aligned} \implies L(K_n) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| < \varepsilon \quad (***) \\ &\implies 0 \leq L(\ell = t_n) - L(t), \quad \text{für } t_{n-1} \leq t \leq t_n = \ell \\ &\stackrel{1.12}{\leq} L(\ell) - L(t_{n-1}) \\ &= L(K_n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\implies L$ ist (linksseitig) stetig bei $t = b$.

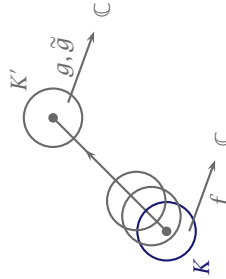
- 2.) Für $t \in]a, b[$ betrachte $\gamma([a, t])$. Wende a) an, dann folgt, dass L linksseitig stetig bei t ist.

5.5 ▶ **Beispiel** Sei $N \in \mathbb{N}, N \geq 2, \gamma(t) = e^{2\pi i t}, 0 \leq t \leq N$. Sei

$$\tau_j := \frac{j}{8}, \quad j = 0, \dots, 8N$$

$$K_j = K_1(\gamma(\tau_j)), \quad j = 0, \dots, 8N$$

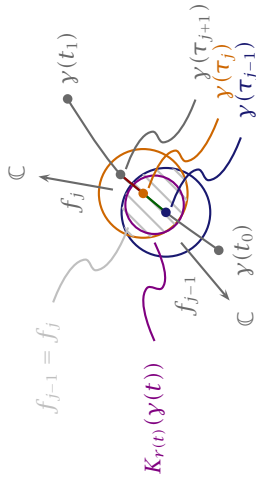
Dann verläuft $\mathcal{K} = (K_0, \dots, K_{8N})$ längs γ . ◀



5.6 **Satz** Seien $\gamma \in C([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}), K, K'$ offene Kreisscheiben um $\gamma(t_0)$ bzw. $\gamma(t_1), f$ holomorph in K und g, \tilde{g} holomorph in K' und \tilde{g}, \tilde{g} seien aus f durch analytische Fortsetzung längs Kreisketten entstanden, die längs γ verlaufen. Dann gilt

$$g = \tilde{g}$$

BEWEIS 1.) Vorüberlegung



Sei $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$ die Unterteilung von $[t_0, t_1]$ mit Kreiskette $K = K_0, K_1, \dots, K_n = K'$ und holomorphe Funktionen $f_j : K_j \rightarrow \mathbb{C}$, die f zu g fortsetzen. Für $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ sei

$$P_t(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)(z - \gamma(t))^n, \quad z \in K_{r(t)}(\gamma(t))$$

die Potenzreihenentwicklung von f_{j-1} um $\gamma(t)$. Beachte: P_t ist auch die Potenzreihe von f_j um $\gamma(t)$, da $f_j = f_{j-1}$ in $K_j \cap K_{j-1}$. Also in P_t Potenzreihenentwicklung von f_j um $\gamma(t)$ sogar für $t \in [\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$. Da γ stetig: Für festes $t \in [t_0, t_1]$

$$\exists \delta > 0 : \|\gamma(t') - \gamma(t)\| < r(t) \text{ für } |t' - t| < \delta, t_0 \leq t' \leq t_1$$

Wähle δ so klein, dass t, t' im selben Intervall $[T_{j-1}, T_{j+1}]$ liegen.

\implies Für $|t' - t| < \delta$ erhält man $P_{t'}$ durch Entwicklung von P_t um $y(t')$, da um $y(t') : P_t = f_j$

Das nennt man die **lokale Vertäglichkeit der Familie** $(P_t)_{t_0 \leq t \leq t_1}$.

Dasselbe für \tilde{g} : Unterteilung $t_0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = t_1, \tilde{P}_t$ Entwicklung von \tilde{f}_j um $y(t)$.

2.) Eigentlicher Beweis

$$M := \{t \in [t_0, t_1] : P_t = \tilde{P}_t\}$$

Zeige: $M = [t_0, t_1] \implies \vartheta = P_t = \tilde{P}_t, \tilde{g} = g$.

1.) $M \neq \emptyset$: Wegen $f_0 = f = \tilde{f}_0$ gilt $[t_0, t_0 + \delta] \subseteq M, \delta$ so gewählt, dass $y(t) \in K = K_0 = \tilde{K}_0$ für $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$.

2.) M ist relativ offen³: Sei $s \in M, \delta > 0$ so klein, dass

$$|y(t) - y(s)| < \min\{r(s), \tilde{r}(s)\} \text{ für } s - \delta < t < s + \delta$$

(Stetigkeit von y): Aus der lokalen Vertäglichkeit folgt: P_t entsteht aus Entwicklung von P_s um $y(t)$ genauso \tilde{P}_t aus \tilde{P}_s .

$$P_s \stackrel{s \in M}{=} \tilde{P}_s \implies P_t = \tilde{P}_t \text{ für } s - \delta < t < s + \delta$$

3.) M ist abgeschlossen: Sei (s_n) in $M, s_n \rightarrow s, s_n \neq s$. Dann gilt $y(s_n) \rightarrow y(s)$ und entweder $y(s_n) = y(s)$ für ein $n \implies s \in M$, da $P_s = P_{s_n}$ oder $y(s_n) \neq y(s)$ für $n \in \mathbb{N}$: Für $n > N_\delta$:

$$P_s(y(s_n)) = P_{s_n}(y(s_n)) = \tilde{P}_{s_n}(y(s_n)) = \tilde{P}_s(y(s_n)) \stackrel{\text{Identitätssatz}}{\implies} \tilde{P}_s = P_s.$$

1., 2. und 3. $\implies M = [t_0, t_1]$. ■

5.7 **Definition** Sei $y \in C([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}), K, K'$ offene Kreisscheiben um $y(t_0)$ bzw. $y(t_1)$. f holomorph in K, g holomorph in K' . Dann heißt g **analytische Fortsetzung** von f längs y , falls es eine längs y verlaufende Kreisreihe \mathcal{K} gibt, sodass g analytische Fortsetzung von f längs \mathcal{K} ist. ✕

wegen

$$\|y(t'_{k+1}) - y(t'_{k-1})\| = \|y(t'_{k+1}) - y(t'_k)\| + \|y(t'_k) - y(t'_{k-1})\|.$$

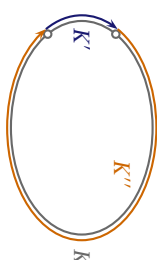
Außerdem

$$L_{\{t'_0, \dots, t'_n\}}(K) = L_{\{t'_0, \dots, t'_k\}}(K') + L_{\{t'_k, \dots, t'_n\}}(K'')$$

damit folgt

$$L(K') + L(K'') \geq L(K) - \epsilon$$

da $\epsilon > 0$ beliebig $L(K') + L(K'') \geq L(K)$. ■



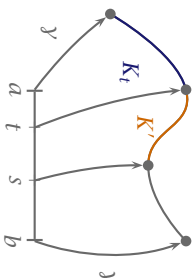
1.13 **Bemerkung:** Ist K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit äquivalenten Parameterdarstellungen f und g , so gilt

$$\begin{aligned} L^{(f)}(K) &= \sup_{\{t_j\}} \sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \\ &= \sup_{\{s_j\}} \sum_{j=1}^n \|g(s_j) - g(s_{j-1})\| \\ &= L^{(g)}(K) \end{aligned}$$

denn zu $\{t_0, \dots, t_n\}$ »passt« genau die Unterteilung $\{\varphi^{-1}(t_0), \dots, \varphi^{-1}(t_n)\}$ und umgekehrt.

1.14 **Hilfssatz** Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(y, [a, b])$. Definiere $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$L(t) = L(K_t), \quad K_t = y([a, t]), \quad a \leq t \leq b$$



³relativ offen: Ich kann M bekommen durch den Schnitt einer offenen Menge mit $[t_0, t_1]$

2.) Sei $\varepsilon > 0$ fest. f' gleichmäßig stetig

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \forall |s - t| < \delta : \|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon$$

Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ mit $\max |t_j - t_{j-1}| < \delta$

$$\Rightarrow \|f'(t)\| = \|f'(t) - f'(t_j) + f'(t_j)\| \\ \leq \varepsilon + \|f'(t_j)\| \quad \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

$$\Rightarrow \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| dt \leq \varepsilon(t_j - t_{j-1}) + \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$$

$$= \varepsilon(t_j - t_{j-1}) + \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(t_j) - f'(t) + f'(t)) dt \right\|$$

$$\leq 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) + \|f'(t_j) - f'(t_{j-1})\|$$

$$\stackrel{\sum_j}{\Rightarrow} \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq 2\varepsilon(b - a) + L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K)$$

$$\leq 2\varepsilon(b - a) + L(K)$$

$$\stackrel{\varepsilon^{10}}{\Rightarrow} \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq L(K)$$

■

1.12 **Hilfssatz** Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$. Ist $a < c < b$, $K' = \gamma([a, c])$, $K'' = \gamma([c, b])$, dann sind K' , K'' rektifizierbare Jordan-Kurven und es gilt $L(K') + L(K'') = L(K)$.

BEWEIS 1.) Seien $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = c$ und $c = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$.

$$\Rightarrow \underbrace{L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K')}_{\geq 0} + \underbrace{L_{\{s_0, \dots, s_n\}}(K'')}_{\geq 0} = L_{\{t_0, \dots, t_n, s_0, \dots, s_n\}}(K) \geq L(K)$$

$\Rightarrow K', K''$ sind rektifizierbar, $L(K') + L(K'') \leq L(K)$.

2.) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $\{t_0, \dots, t_n\}$ mit

$$L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) \geq L(K) - \varepsilon$$

Füge eventuell c als Unterteilungspunkt dazu.

$$\{t'_0 = a < t'_1 < \dots < t'_k = c < t'_{k+1} < \dots < t'_m = b\}$$

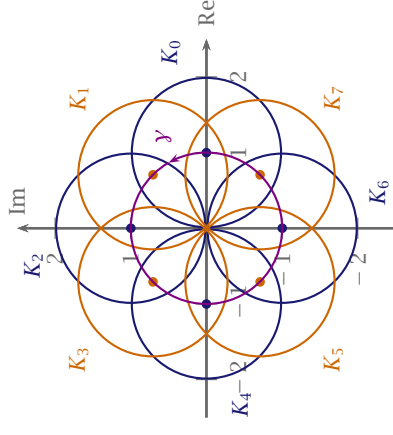
Wegen der Dreiecksungleichung

$$L_{\{t'_0, \dots, t'_m\}}(K) \geq L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) \geq L(K) - \varepsilon$$

5.8 **Beispiel** Seien $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $f(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z}$

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq N$$

$$\tau_j = \frac{j}{8N}, \quad K_j = K_1(\gamma(\tau_j)), \quad j = 0, \dots, 8N.$$



Setze f längs K_0, K_1, \dots, K_{8N} fort

$$f_0 = f|_{K_0} \quad \text{für } j = 1, 2$$

Wie sieht f_3 aus?

$$\arg_{\pi}(z) := \begin{cases} \arg(z) & \operatorname{Im} z > 0 \\ \pi & z \in]-\infty, 0[\\ \arg(z + 2\pi) & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Setze $g_1(z) := |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg_{\pi} z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 \text{ holomorph in } \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\\ g_1|_{\{z: \operatorname{Im} z > 0\}} = f|_{\{z: \operatorname{Im} z > 0\}} \end{cases} \\ \Rightarrow f_j = g_1|_{K_j}, \quad j = 3, 4, 5, 6$$

Setze $g_2(z) := |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg_{\pi}(z+2\pi)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_2 \text{ holomorph in } \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \\ g_2|_{\{z: \operatorname{Im} z < 0\}} = g_1|_{\{z: \operatorname{Im} z < 0\}} \end{cases} \\ \Rightarrow f_j = g_2|_{K_j}, \quad j = 7, 8, 9, 10$$

Beachte: $K_8 = K_0$, aber $f_8 = e^{i\frac{2\pi}{8}} f_0 \neq f_0$.

$$f_{16} = e^{i2\frac{2\pi}{16}} f_0 \neq f_0$$

⋮

$$f_{8N} = e^{iN\frac{2\pi}{8}} f_0 = f_0$$

Nach der N -ten Umkreisung der 0 landen wir wieder bei der ursprünglichen Funktion. ▶

5.9 Umparametrisierung Sei $\gamma \in C([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C})$, f_1 analytische Fortsetzung von f längs γ , $\varphi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ stetig, streng monoton wachsend, $\varphi(s_0) = t_0$, $\varphi(s_1) = t_1$. Damit ist f_1 auch analytische Fortsetzung von f längs $\gamma \circ \varphi$. Insbesondere kann immer $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ gewählt werden.

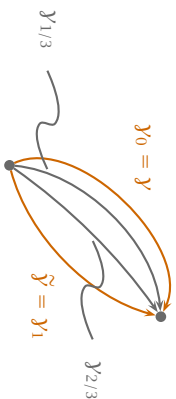
BEWEIS Verwende dieselbe Kreiskette, als Unterteilung von $[s_0, s_1] : s_j = \varphi^{-1}(t_j)$. ■

5.10 Monodromiesatz Seien $\gamma, \tilde{\gamma} \in C([0, 1] \rightarrow \mathbb{C})$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Weiter sei $\Phi \in C([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C})$ eine Homotopie zwischen $\gamma, \tilde{\gamma}$, das heißt

$$\Phi(\cdot, 0) = \gamma \quad \Phi(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}$$

$$\Phi(0, s) = \gamma(0) \quad \Phi(1, s) = \gamma(1), \quad 0 \leq s \leq 1$$

Ist f_0 holomorph in einer Kreisscheibe $K_r(\gamma(0))$ und lässt sich f_0 längs jedes Weges $\gamma_s = \Phi(\cdot, s)$ analytisch fortsetzen, dann stimmen die analytischen Fortsetzungen von f_0 längs γ und $\tilde{\gamma}$ überein.



Der Beweis verläuft ähnlich wie in 5.6.

×

5.11 Definition Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede geschlossene stetige Kurve γ in G nullhomotop ist, das heißt es existiert eine Homotopie $\Phi \in C([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G)$ zwischen γ und einer konstanten Kurve.

Oder äquivalent: Zu je zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 \in C([0, 1] \rightarrow G)$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ existiert eine Homotopie $\Phi \in C([0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G)$. ×

▶ **Beispiel**

$\mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ Gebiet, einfach zusammenhängend

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Gebiet, nicht einfach zusammenhängend

(Der Kreis um die 0 ist nicht nullhomotop)

1.) Existiert eine Parameterdarstellung $(f, [a, b])$ mit $f \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ und $f'(t) \neq 0$ auf $[a, b]$, so heißt K **glatt**. Insbesondere ist dann T_f stetig.

2.) K heißt **stückweise glatt**, falls es eine Parameterdarstellung $(f, [a, b])$ gibt und eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, sodass die Teilkurven von K glatt sind:

$$f|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

und $f'(t) \neq 0$ für $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

×

1.9 Bemerkung: Glatte Kurven haben keine Ecken, stückweise glatte Kurven können Ecken besitzen.

→

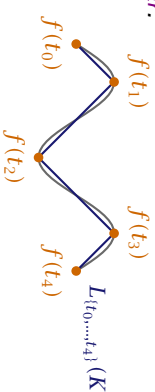
1.10 Definition Sei K eine Jordan-Kurve mit der Parameterdarstellung $(f, [a, b])$.

1.) Falls

$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b :$$

$$L_{(t_0, \dots, t_n)}(K) = \sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq M$$

so heißt K **rektifizierbar**.



2.) Ist K rektifizierbar, so heißt

$$L(K) = \sup_{M \in \mathbb{N}} L_{(t_0, \dots, t_M)}(K)$$

die **Bogenlänge** von K .

×

1.11 Satz Sei K glatte Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(f, [a, b])$, $f \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Dann ist K rektifizierbar und es gilt

$$L(K) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

BEWEIS 1.) Für $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gilt

$$\|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| dt$$

$$\Rightarrow L_{(t_0, \dots, t_n)}(K) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt =: M$$

$$L(K) \leq M$$

⇒ K ist rektifizierbar.

- ▶ $\varphi'(t) > 0$ in $[a, b]$
- ▶ $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$
- ▶ $f(t) = (g \circ \varphi)(t), t \in [a, b]$

so heißen die Parameterdarstellungen äquivalent.

1.5 **Beispiel** 1.) Die Parameterdarstellung

$$g(t) = \begin{pmatrix} r \cos\left(8\pi \frac{t}{1+t}\right) \\ r \sin\left(8\pi \frac{t}{1+t}\right) \\ c \left(8\pi \frac{t}{1+t}\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist äquivalent zu f aus 1.3 (mit $\varphi(t) = 8\pi \frac{t}{1+t}$).

2.) Die Parameterdarstellung

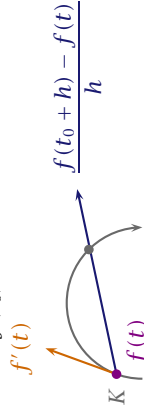
$$h(t) = \begin{pmatrix} r \cos t^2 \\ r \sin t^2 \\ ct^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{4\pi}$$

ist nicht äquivalent zu f aus 1.3 ($\varphi(t) = t^2$), weil $\varphi'(0) = 0$.

1.6 **Definition** Sei $(f, [a, b])$ Parameterdarstellung von K . Existiert $f'(t_0)$ und ist $f'(t_0) \neq 0$, so heißt

$$T_f(t_0) := \frac{1}{\|f'(t_0)\|} f'(t_0)$$

Tangenteneinheitsvektor an K im Punkt $f(t_0)$.



1.7 **Satz** Sind $(f, [a, b])$ und $(g, [c, d])$ äquivalente Parameterdarstellungen von K , so gilt

$$\begin{aligned} T_f(t) &= \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{(g \circ \varphi)'(t)}{\|(g \circ \varphi)'(t)\|} \\ &= \frac{g'(\varphi(t))\varphi'(t)}{\|g'(\varphi(t))\varphi'(t)\|} \stackrel{\varphi'(t) > 0}{=} \frac{g'(\varphi(t))}{\|g'(\varphi(t))\|} \\ &= T_g(\varphi(t)) \end{aligned}$$

1.8 **Definition** Sei K eine Kurve im \mathbb{R}^n .

5.12 **Folgerung** $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, f_0 holomorph in $K_r(z_0) \subseteq G$. Lässt sich f_0 längs jeder stetigen Kurve γ mit Anfangspunkt z_0 analytisch fortsetzen, dann gibt es genau eine holomorphe Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f \Big|_{K_r(z_0)} = f_0$$

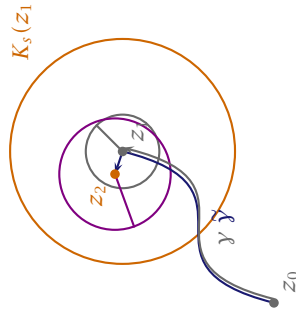
BEWEIS 1.) Definiere $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $z_1 \in G$. Da G ein Gebiet ist folgt: Es existiert eine stetige Kurve γ von z_0 nach z_1 . Setze f_0 längs γ fort zu $f_1 : K_s(z_1) \rightarrow \mathbb{C}$ (f_1 ist holomorph). Setze $f(z_1) := f_1(z_1)$. f ist sinnvoll definiert: Ist $\tilde{\gamma}$ eine andere stetige Kurve von z_0 nach z_1 . Da G einfach zusammenhängend ist folgt $\gamma \sim \tilde{\gamma}$.

Monodromiesatz 5.10: Fortsetzung längs $\tilde{\gamma}$ liefert dieselbe Funktion f_1 .

2.) Zeige: f ist holomorph. Sei $z_1 \in G$ fest, f_1 wie oben. Zeige

$$f \Big|_{K_{s/\beta}}(z_1).$$

Dann ist f holomorph in $K_{s/\beta}(z_1)$. Da $z_1 \in G$ holomorph ist, ist f holomorph in G .



Sei $z_2 \in K_{s/\beta}(z_1)$. Bilde $\tilde{\gamma}$ aus γ durch Anhängen der Strecke $z_1 z_2$. Ergänze die Kreiskette \mathcal{K} längs γ , die zur Fortsetzung längs γ verwendet wurde, durch $K_{s/2}(z_2)$ zur Kreiskette $\tilde{\mathcal{K}}$ längs $\tilde{\gamma}$. $f(z_2)$ wird definiert durch analytische Fortsetzung von f_0 längs $\tilde{\gamma}$. Dies liefert $f_2 : K_{s/2}(z_2) \rightarrow \mathbb{C}$. Wegen

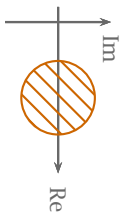
$$f_2 = f_1 \text{ in } K_{s/2}(z_2) \cap K_s(z_1)$$

folgt $f(z_2) := f_2(z_2) = f_1(z_2)$.

3.) Zeige: f ist eindeutig. Ist $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_n)$ Kreiskette längs γ , so ist $f \Big|_{K_j}$ eine analytische Fortsetzung längs γ . Aus Satz 5.6 folgt: Jede andere Fortsetzung längs γ liefert dieselbe analytische Fortsetzung. ■

5.13 **Beispiel**

$$f_0(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z} \quad \text{in } K_1 \text{ (2)}$$



Falls $G = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$

$$f(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z}$$

falls $G = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 10]$

$$f(z) = |z|^{1/N} e^{i \frac{1}{N} \arg z}$$



5.14 **Ausblick** Erweiterung des Wegintegrals auf stetige Kurven. Ist f analytische fortsetzbar längs γ mit Unterteilung

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1,$$

so definiere

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma|_{[\tau_{j-1}, \tau_j]}} f(z) dz$$

$$\int_{\gamma|_{[\tau_{j-1}, \tau_j]}} f(z) dz =: F_j(\gamma(\tau_j)) - F_j(\gamma(\tau_{j-1})).$$

F ist die lokale Stammfunktion der Fortsetzung von f in K_j .



2 VEKTORANALYSIS

2.1 Kurvenintegrale

1.1 **Definition** Sei $f \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

1.) $K := \text{Bild}(f)$ heißt **Kurve im \mathbb{R}^n** , $(f, [a, b])$ heißt **Parameterdarstellung** von K . Ist $f(a) = f(b)$, so heißt K **geschlossen**.

2.) Ist $f|_{[a,b]}$ **injektiv**, so heißt K **Jordan-Kurve**.



Diese Kurve ist **geschlossen und nicht Jordan**.

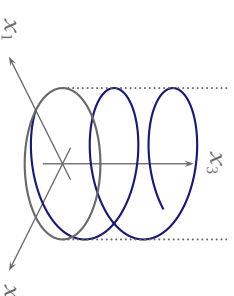


1.2 **Bemerkung:** Die Parameterdarstellung induziert den Durchlaufsinn.



1.3 **Beispiel** Für $r > 0, c > 0$ beschreibt

$$f(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ct \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$



eine Schraubenlinie mit Radius r und Ganghöhe $\frac{c}{2\pi}$.



1.4 **Definition** Seien $(f, [a, b])$ und $(g, [c, d])$ zwei Parameterdarstellungen von K . Existiert $\varphi \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ mit