

Prof. Dr. Harald Giessen, Universität Stuttgart

Experimentalphysik 3

Vorlesungsmitschrieb

Stuttgart, Wintersemester 2012 / 2013

Revision: 20. Januar 2013

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.¹

¹Henri Menke, phy86901@stud.uni-stuttgart.de

Willkommen zur Experimentalphysik 3 — Optik, Wellen und Teilschen

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

INHALTSVERZEICHNIS

1 Elektrodynamische Grundlagen	1
1.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum	1
1.2 Materialwellen	13
2 Licht-Materie-Wechselwirkung	37
2.1 Makroskopische Beschreibung	37
2.2 Mikroskopische Beschreibung von Licht-Materie-Wechselwirkung	38
2.3 Lichtleitung und Glasfasern	59
3 Geometrische Optik	61
3.1 Das Fermat'sche Prinzip	61
Index	71

I

ELEKTRODYNAMISCHE GRUNDLAGEN

1.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

1.1.1 Wellengleichung

Die Maxwellschen Gleichungen sind Axiome der Elektrodynamik (klassische Betrachtung).

Maxwellgleichungen in differentieller Form

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gaußsches Gesetz des Magnetismus} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad \text{Durchflutungsgesetz} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{Gaußsches Gesetz} \quad (1.4)$$

Trick

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}} = \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{E}}$$

Benutze die Identität $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Verallgemeinerung: Allgemeine Wellengleichung.

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{\xi}}} \quad \text{mit } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (1.5)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Die Gleichung gilt komponentenweise (Überlagerungsprinzip), als Folge ihrer Linearität. Betrachten wir der Einfachheit halber eine linear polarisierte Welle, bei der nur noch eine Komponente des \mathbf{E} -Feldes ungleich Null ist:

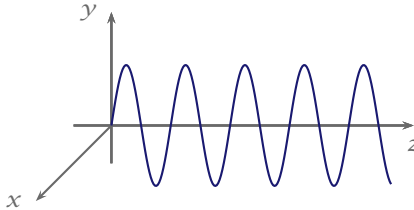
$$\mathbf{E} = (0, E, 0)$$

Einsetzen liefert:

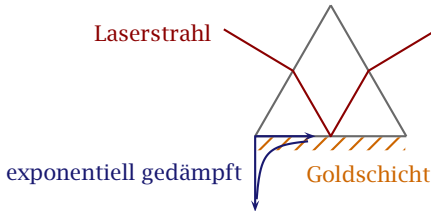
$$(\Delta E)_y = \frac{1}{c^2} \ddot{E}_y \quad (1.6)$$

E_y hängt nur von der Ausbreitungsrichtung der Welle (1.6) ab (hier z). Somit vereinfacht sich Gleichung (1.6) zu:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (1.7)$$



Elektrisches Feld einer elektromagnetischen Welle. Lösung von (1.7).



Glasprisma

Die allgemeine Lösung von (1.7) lautet

$$E_y = E_{y_0} f(z - ct) \quad (1.8)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= E_{y_0} f''(z - ct) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} E_{y_0} f''(z - ct) c^2 \end{aligned}$$

Somit sieht man, dass alle Funktionen der Form (1.8) eine Lösung der Wellengleichung darstellen. Spezielle Lösung der Wellengleichung sind die harmonischen Wellen:

$$\boxed{f(z - ct) = \sin[k(z - ct)]} \quad \text{mit der Wellenzahl} \quad \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (1.9)$$

Aus der Maxwellgleichung: $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ folgt im Vakuum ($\rho = 0$ — keine freien Ladungen):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}}_{(a)} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Für (a) gilt hierbei:

$$(a) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

Bei Ausbreitung in z-Richtung

$$E_z = \text{const.}$$

Elektromagnetische Wellen sind transversale Wellen im Vakuum.

Komplexe Schreibweise

Oft wird folgende komplexe Schreibweise verwendet:

$$\mathbf{E}_+ = E_0 \exp(i(kz - \omega t)) \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{E}_- = E_0^* \exp(-i(kz - \omega t)) \quad (1.10b)$$

Mit der Frequenz $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$.

Es ist zu beachten, dass nur der Realteil (z.B.: $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_x)$) oder der Imaginärteil (z.B.: $\operatorname{Im}(\mathbf{E}_x)$) physikalisch sinnvolle Lösungen der Wellengleichung sind und gemessen werden können. Nun stellt sich die Frage nach dem Magnetfeld.

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} \quad (1.11)$$

Dies ist die Wellengleichung für das magnetische Feld. Mit

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

und Einsetzen der elektrischen Lösung

$$E_x = E_{x_0} \exp(i(kz - \omega t))$$

erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x = -\dot{B}.$$

Daraus folgt, dass $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ ist.

Man sieht, dass beide Wellen das gleiche ω und k haben. Um die Phasenverschiebung der beiden Felder zu betrachten nehmen wir wieder die ebene Wellenlösung und bilden die Zeitableitung:

$$\begin{aligned} B_y &= B_{y0} \exp(i(kz - \omega t)) \\ \dot{B}_y &= -i\omega B_y \end{aligned}$$

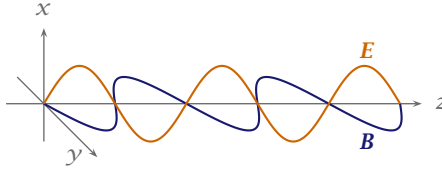
Mit den Maxwellgleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x = ikE_x = i\omega B_y.$$

Daraus folgt:

$$E_x = \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{=c} B_y \quad (1.12)$$

Die beiden Wellen Schwingen im Vakuum in Phase:



Die *Intensität* bezeichnet die Energiestromdichte, also die transportierte Energie pro Zeit und Fläche, bzw. Leistung pro Fläche. Einheit: $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$

$$I = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = c\eta = c\epsilon_0 E^2 \quad (1.13)$$

Die Energiedichte η ist hierbei (mit $E = cB$):

$$\eta = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) = \epsilon_0 E^2 \quad (1.14)$$

Der *Poyntingvektor* erfasst die Richtungsabhängigkeit des Energietransports:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (1.15)$$

Der Betrag des Poyntingvektors \mathbf{S} entspricht genau der Intensität I :

$$|\mathbf{S}| = \epsilon_0 \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2 = I$$

Betrachten wir die Richtung des Poyntingvektors im Vakuum:

$$\mathbf{S} \perp \mathbf{B}, \mathbf{S} \perp \mathbf{E}$$

Somit ist $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ im Vakuum.



Der Poyntingvektor steht senkrecht auf der Wellenfront und ist somit parallel zu \mathbf{k} .

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

\mathbf{k} ist hierbei der Wellenvektor mit der Wellenzahl: $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

1.1.2 Interferenz

Superpositionsprinzip Überlagerung von Lösungen der Wellengleichung sind wieder eine Lösung der Wellengleichung. \times

Bei gegebenen Randbedingungen lässt sich durch Linearkombination von bekannten Lösungen (z.B.: ebenen Wellen) eine passende Lösung für das Problem finden.

► **Beispiel** Eine Welle wird an einem Metallspiegel in sich zurück reflektiert (bei $z = 0$). Die Randbedingung ist somit $E_{\text{ges}}(z = 0) = 0$:

$$E_{\text{hin}}(z, t) = E_0 \cos(\omega t + kz)$$

$$E_{\text{rück}}(z, t) = -E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Diese Gleichungen erfüllen die Randbedingung:

$$0 = E_{\text{hin}}(z = 0) + E_{\text{rück}}(z = 0)$$

Durch Addition erhalten wir die Lösung:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= E_0 [\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)] \\ &= 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

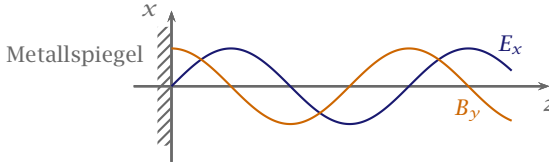
Für den Fall, dass Licht in x -Richtung linear polarisiert ist, $\mathbf{E}_0 = (E_x, 0, 0)^T$, gilt nach Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x &= -\dot{B}_y \end{aligned}$$

Einsetzen und nach t integrieren

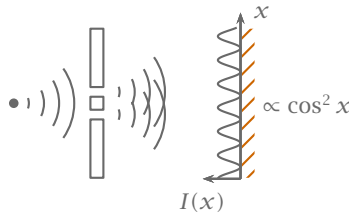
$$B_y = - \int 2E_x k \cos(kz) \sin(\omega t) dt$$

$$\mathbf{B}_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2E_x \frac{k}{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz) \cos(\omega t) \tag{1.16}$$

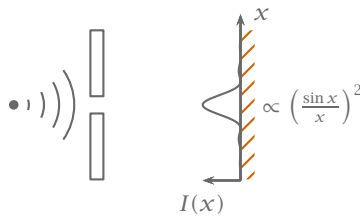


Interferometer

Young-Doppelspalt



Im folgendem Bild ist die Beugung von Wellen einer Punktlichtquelle am Einfachspalt zu sehen:



Experimentell wird folgendes Resultat für die Intensität erzielt:

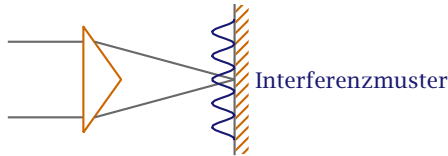
$$I(x) \propto \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \text{sinc}^2 x$$

Die Periode des $\cos^2 x$ Beugungsbildes beim Doppelspalt hängt umgekehrt proportional vom Abstand der beiden Spalte ab, genauso hängt der Abstand der Minima beim

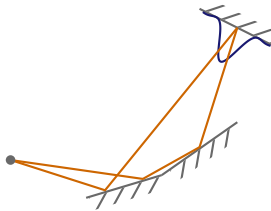
Einfachspalt umgekehrt proportional mit der Spaltbreite zusammen. Im Fernfeld ist das Beugungsbild die Fouriertransformierte der Transmissionsfunktion des Spalts.

Komplexere Transmissionsfunktionen wie zum Beispiel breite Mehrfachspalte lassen sich bequem durch Faltungen von einfacheren Funktionen (zum Beispiel: rect-Funktion oder δ -Paare) darstellen, Nach dem Faltungssatz (*Parseval-Theorem*) ist das Beugungsbild dann einfach das Produkt der Fouriertransformierten. Wird das Fernfeld bei einem Abstand von $d \ll 10\lambda$ beobachtet, es wird von der *Fraunhofer-Region* gesprochen.

Fresnel-Biprisma

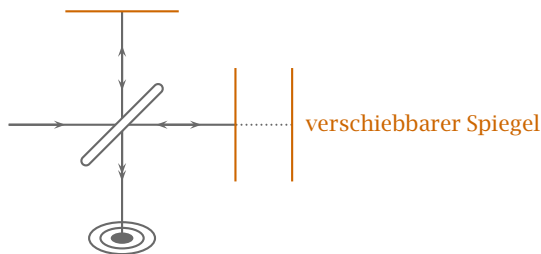


Lloyd-Doppelspiegel



Michelson-Interferometer

Im Versuch wird ein beweglicher Spiegel um $d = 20 \mu\text{m}$ verschoben und 63 (im Versuch 64) Hell-Dunkel-Sequenzen im Interferenzmuster beobachtet. Der Versuchsaufbau ist im folgendem Bild zu sehen:



Wählt man:

$$\Delta d = m \frac{\lambda}{2}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, erhält man eine Hell-Dunkel Sequenz am Detektor.

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{d}{\text{Anzahl}} = \frac{20 \mu\text{m}}{64} = 0.3125 \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow \lambda = 625 \text{ nm}$$

Der verwendete Laser besitzt eine Wellenlänge von $\lambda = 632.8 \text{ nm}$

Die ausgedehnten Ringe kommen zustande, weil man mit leicht divergentem Licht arbeitet und sich die Wellenlängendifferenz als Vielfaches von $\lambda/2$ manifestieren.

1.1.3 Polarisation des Lichtes

Bei linearer Polarisation ist der E -Vektor einer ebenen Welle konstant:

$$\mathbf{E}_1 = E_{0,1} \exp(i(kz - \omega t)) \quad \mathbf{E}_{0,1} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

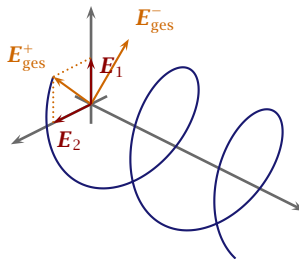
$$\mathbf{E}_2 = E_{0,2} \exp(i(kz - \omega t)) \quad \mathbf{E}_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beides sind Lösungen der Wellengleichung, ihre Superposition also auch:

$$\mathbf{E}_1 \pm \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{\text{ges}} \exp(i(kz - \omega t))$$

Nicht nur reelle, sondern auch komplexe Linearkombinationen von \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 sind Lösungen der Wellengleichung.

► **Beispiel** Es soll folgender Fall betrachtet werden : $\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$. Hierfür gilt folgende Abbildung:



+: von vorne gesehen Linksschraube — links zirkular polarisiertes Licht

-: von vorne gesehen Rechtsschraube — rechts zirkular polarisiertes Licht

Bei einer Phasenverschiebung von $\varphi \neq 90^\circ$, oder bei $\varphi = 90^\circ$ und $|E_x| \neq |E_y|$ spricht man von elliptischen polarisiertem Licht.

Allgemeine Überlagerung:

$$\mathbf{E}_{\text{ges}} = a_1 \mathbf{E}_1 + a_2 \mathbf{E}_2 \quad , \quad a_{1/2} \in \mathbb{C}$$

Dabei macht $|a_1|^2 + |a_2|^2$ nur eine Aussage über die Gesamtintensität. Eine gemeinsame absolute Phase von a_1 und a_2 beeinflussen den Polarisationszustand nicht. Die relative Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen a_1 und a_2 ist:

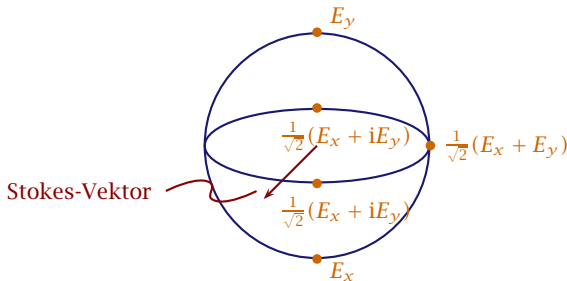
$$a_1 = |a_1| \exp(i\varphi_1) \quad \text{und} \quad a_2 = |a_2| \exp(i\varphi_2)$$

Dies ist die Polardarstellung von a_1 und a_2 .

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Die relative Amplitude ist $a = |a_1|/|a_2|$

Darstellung des Polarisationszustandes auf der *Stokes-Kugel*:



Bei <http://demonstrations.wolfram.com/LightPolarizationAndStokesParameters/> kann man sich eine interaktive Animation zur Stokes-Kugel ansehen.

Die gegenüberliegenden Zustände sind orthogonal, bilden also eine Basis.

Jones-Vektoren

Die formale (und praktische) Beschreibung von Polarisation erfolgt durch normierte zweidimensionale Vektoren, die sogenannten *Jones-Vektoren*.

$$\mathbf{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{horizontal polarisiertes Licht}$$

$$\mathbf{E}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vertikal polarisiertes Licht}$$

$$\mathbf{E}_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{linear polarisiertes Licht}$$

$$\mathbf{E}_{\text{RCP}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \sigma_- \text{-polarisiertes Licht}$$

$$\mathbf{E}_{\text{LCP}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \sigma_+ \text{-polarisiertes Licht}$$

► *Beispiel* Überlagerung von σ_+ und σ_- - Licht:

$$\mathbf{E}_{\text{ges}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \mathbf{E}_x$$

Es handelt sich also um linear polarisiertes Licht. ◀

Elliptisch polarisiertes Licht:

$$\mathbf{E}_{\text{ell}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$$

wenn:

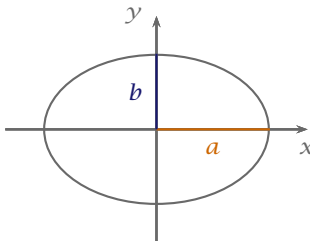
$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_1 \text{ und } \mathbf{E}_2 \text{ sind orthogonal}$$

Elliptische Polarisation

Für eine Ellipse gilt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hierbei bezeichnet a die große und b die kleine Halbachse.

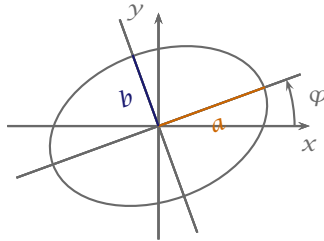


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \varepsilon \in [0, 1]$$

- ▶ $\varepsilon = 0$: zirkular polarisiertes Licht
- ▶ $\varepsilon = 1$: linear polarisiertes Licht

Lage der großen Halbachse kann vom Winkel φ gedreht werden.



Allgemeine Ellipsengleichung

Die *allgemeine Ellipsengleichung* lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cos t \cos \varphi - b \sin t \sin \varphi \\ y_0 + b \cos t \sin \varphi + a \sin t \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

In Komponentenschreibweise der E -Felder in x - und y -Richtung gilt:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_y(z, t) &= E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \\ \Rightarrow \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \varepsilon &= \sin^2 \varepsilon \end{aligned}$$

Messung der Polarisation

Für einen idealen Polarisator in y -Richtung gilt:

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \end{pmatrix}$$

Die x -Komponente wird durch den Polarisator absorbiert (Polymer-Polarisator) oder reflektiert (Calcit).

Mit Matrizen kann man Polarisationsfilter beschreiben:

$$\mathcal{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für allgemeine Filter \mathcal{P} berechnet sich die ausgehende Polarisation zu:

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{in}}$$

Um einen gedrehten Polarisator zu berechnen, drehen wir zuerst in ein neues Koordinatensystem, führen die Messung aus und drehen dann ins ursprüngliche Koordinatensystem zurück.

Die Drehmatrix ins gedrehte System ist:

$$\mathcal{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \stackrel{\alpha=45^\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann wird die Messung durchgeführt von:

$$\mathcal{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Rücktransformation ist:

$$\mathcal{R}_{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\mathcal{P}_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

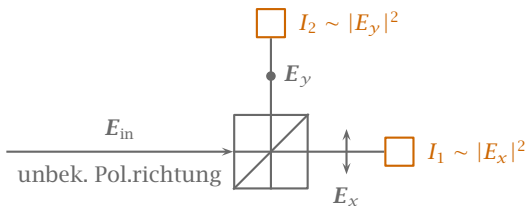
Man kann n polarisierende Elemente hintereinander schalten. Zur Berechnung der Gesamtpolarisation ist nur eine Matrixmultiplikation nötig:

$$\mathcal{P}_{\text{ges}} = \mathcal{P}_n \cdot \mathcal{P}_{n-1} \cdot \dots \cdot \mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{P}_1$$

Da ein Polarisator immer nur *eine* Komponente misst, braucht man 2 Messungen um den Polarisationszustand zu berechnen.

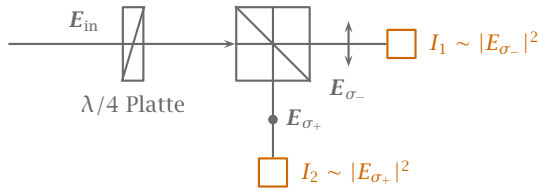
► **Beispiel** Exzentrizität ε und die Lage der großen Halbachse φ .

1. Messung



Die Messung liefert die beiden Komponenten $|E_x|, |E_y|$ oder nicht deren relative Phase.

2. Messung



Das $\lambda/4$ -Plättchen führt zu einer polarisationsabhängigen Phasenverschiebung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{P}_{\lambda/4} = \mathcal{R}_{45^\circ} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}_{-45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Durch den polarisierenden Strahlteiler wird $E_{\sigma_{\pm}}$ auf $\pm E_{x,y}$ abgebildet. Diese Messung liefert also $|E_{\sigma_+}|$ und $|E_{\sigma_-}|$. ◀

Folglich erlaubt diese »Polarisationstomographie« die Rekonstruktion des Polarisationszustandes. Wichtig ist, dass eine *einzelne* Messung den Polarisationszustand nicht rekonstruieren kann.

Trick: Benutze Einzelphotonenquelle, dann kann der Polarisationszustand einzelner Photonen nicht gemessen und kopiert werden (»sichere« Quantenkommunikation). \rightarrow

1.2 Materialwellen

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

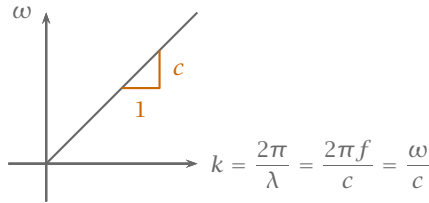
Ebene Wellen haben die Form:

$$E_x = E_0 \exp(i(kz - \omega t + \phi))$$

Daraus erhält man die sogenannte Dispersionsrelation:

$$\omega(k) = c \cdot k$$

durch Einsetzen in die Wellengleichung.



Nach dem Superpositionsprinzip ergeben sich neue Lösungen der Wellengleichung als Summe von Lösungen. Ein *Wellenpaket* setzt sich als Linearkombination vieler ebener Wellen im Intervall $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ zusammen. Somit erhalten wir für:

$$E_x(z, t) = E_0 \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp(i(kz - \omega(k)t)) dk$$

Entwickelt man nun $\omega(k)$ für $k \ll k_0$ um k_0 herum als Taylorreihe, so erhält man:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} + (k - k_0)^2 \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} + \mathcal{O}(k^3)$$

Hierbei ist $(\partial \omega / \partial k)_{k_0}$ die *Gruppengeschwindigkeit*, mit der sich die Energie und somit die Information ausbreitet. $(\partial^2 \omega / \partial k^2)_{k_0}$ entspricht der *Gruppengeschwindigkeitsdispersion*. In reeller Schreibweise erhält man:

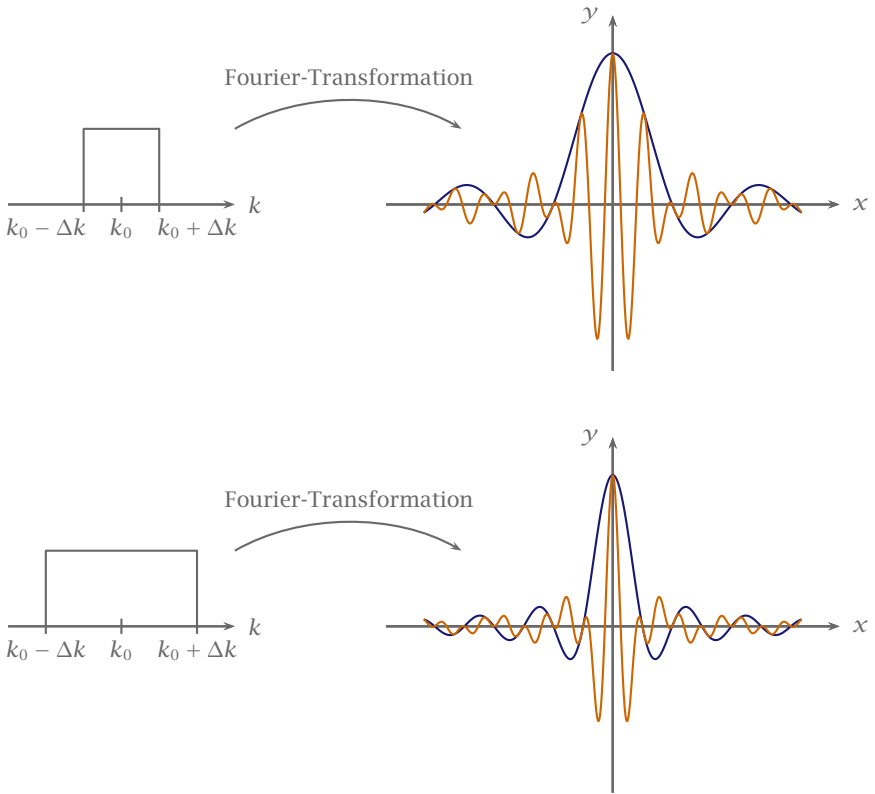
$$E_x(z, t) = E_0 \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \cos((kz - \omega(k)t)) dk$$

Bricht man die Taylorentwicklung nach dem zweiten Glied ab, erhält man:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)c_g(k_0)$$

c_g entspricht der Gruppengeschwindigkeit. Somit ist:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \int \cos(kz - \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} t - (k - k_0)c_g(k_0)t) dk \\ &= 2E_0 \frac{\Delta k}{2\pi} \underbrace{\frac{\sin(\Delta k(c_g t - z))}{\Delta k(c_g t - z)}}_{\substack{=\xi \\ \text{sinc-Funktion}}} \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 z)}_{\text{cos-Trägerwelle}} \end{aligned}$$



Man sieht, dass die Einhüllende des Wellenpakets mit der Gruppengeschwindigkeit

$$c_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$$

propagiert.

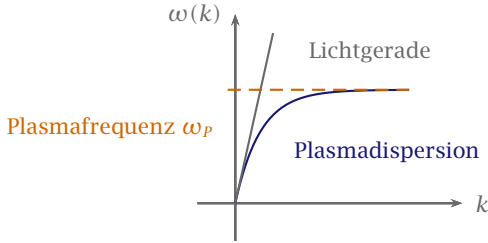
Die einzelnen Wellenfronten (orange eingezeichnet) propagieren mit der *Phasengeschwindigkeit*:

$$c_p = \frac{\omega_0}{k_0}.$$

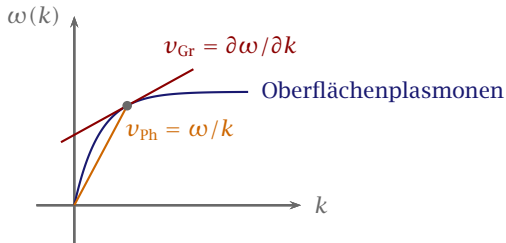
Wir haben die Dispersion höherer Ordnung vernachlässigt. Falls $\partial^2 \omega / \partial k^2 = 0$ ist, gibt es keine Dispersion und das Wellenpaket zerfließt nicht.

Im Allgemeinen liegt in einem Medium oder in einem Wellenleiter eine nicht-triviale Dispersion $\omega(k)$ vor.

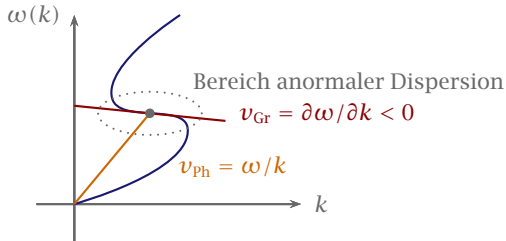
► *Beispiel* Plasmonendispersion:



Dispersionsrelation



anormale Dispersion



Diese Art der Dispersion kommt zum Beispiel bei »Exciton-Polaritonen« vor. Dies entspricht Elektronen-Loch-Paaren im Halbleiter.

Rechenregeln für die Fouriertransformation

Fourierreihen kommen immer dann zum Einsatz, wenn periodische Funktionen durch eine Reihe genähert werden.

Definition

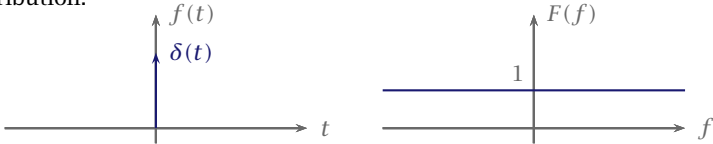
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$F(\omega)$ ist das Fourierspektrum der Funktion $f(t)$, es befindet sich im Frequenzraum. Die Funktion $f(t)$ befindet sich im Zeitraum. Die inverse Fouriertransformierte (Rücktransformation) ist:

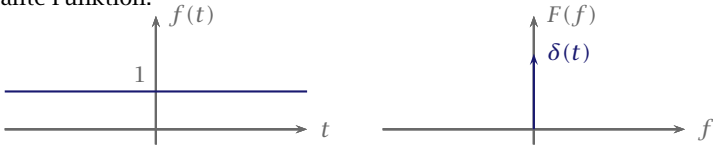
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

Fouriertransformations-Paare

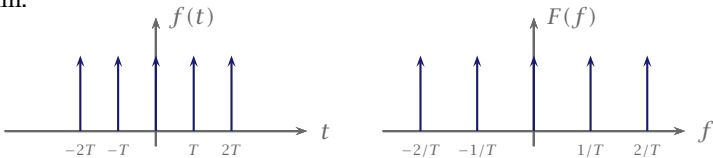
Delta-Distribution:



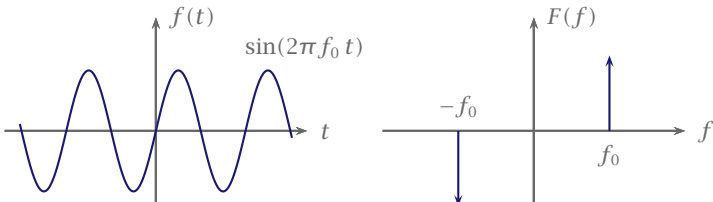
Eine konstante Funktion:



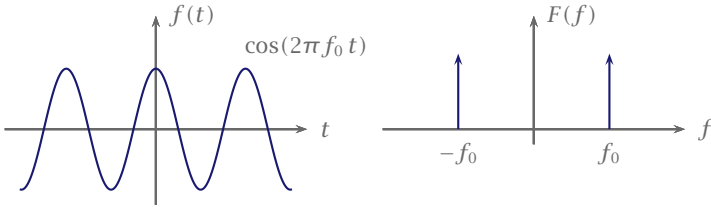
Delta-Kamm:



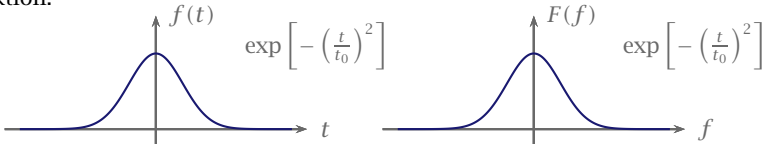
Sinus:



Cosinus:



Gauß-Funktion:



Merke: Euler Formeln:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$$

Rechenregeln

	$f(t)$	\longleftrightarrow	$F(\omega)$
Linearität	$a f_1(t) + b f_2(t)$	\longleftrightarrow	$a F_1(\omega) + b F_2(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	\longleftrightarrow	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
Multiplikation	$f(t) \cdot g(t)$	\longleftrightarrow	$F(\omega) * G(\omega)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	\longleftrightarrow	$F(\omega) \exp -i\omega t$
Frequenzverschiebung	$f(t) \exp(i\omega t)$	\longleftrightarrow	$F(\omega - \omega_0)$
Ableitung	$\frac{d}{dt} f(t)$	\longleftrightarrow	$i\omega F(\omega)$
Multiplikation mit t	$t \cdot f(t)$	\longleftrightarrow	$i \frac{d}{d\omega} F(\omega)$
Zeitskalierung	$f(at)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

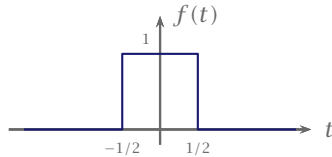
Für das *Faltungsintegral* gilt:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(\tau - t) d\tau$$

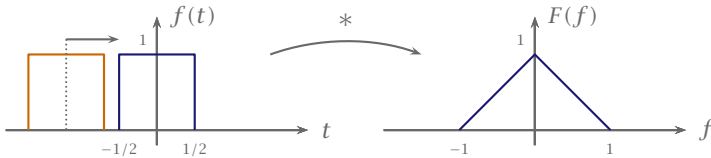
Bemerkung: Für die Rechteck- und Dreieck-Funktion gilt:

$$\begin{aligned}\text{rect}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(\omega) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \\ \text{tri}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}^2(\omega) = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}\end{aligned}$$

► **Beispiel** Faltung von $\text{rect}(t) * \text{rect}(t)$.



Für den Flächeninhalt der gemeinsam bedeckten Flächen gilt:



Siehe auch Animation: [https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_\(Mathematik\)#Bedeutung](https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_(Mathematik)#Bedeutung)

Für die Berechnung gilt nach den obigen Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\text{rect}(t) * \text{rect}(t)) &= \text{sinc}(\omega) \cdot \text{sinc}(\omega) \\ &= \text{sinc}^2(\omega)\end{aligned}$$

Die Rücktransformation liefert also: $\mathcal{F}^{-1}(\text{sinc}^2(\omega)) = \text{tri}(t)$.



1.2.1 Schrödinger Gleichung

De Broglies's Ansatz für die Wellenfunktion lautet:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \exp(i(kx - \omega t)) \\ &= \exp\left(i2\pi\left(\frac{x}{\lambda_{dB}} - \nu t\right)\right) \\ &= \exp\left(i\frac{px - Et}{\hbar}\right)\end{aligned}$$

Mit $\hbar = h/(2\pi)$ folgt für die *de Broglie Wellenlänge* eines Teilchens mit Masse m und der Gruppengeschwindigkeit v :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

und

$$E = h \cdot \nu_{dB}$$

ψ ist im Gegensatz zu einer klassischen Wellenamplitude komplex. Es wird noch eine Interpretation benötigt, was π physikalisch bedeutet.

Betrachte die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{ip}{\hbar} \psi & \Rightarrow & (-i\hbar \partial_x) \psi = p \psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(\frac{ip}{\hbar} \right)^2 \psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{iE}{\hbar} \psi & \Rightarrow & (i\hbar \partial_t) \psi = E \psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\frac{E^2}{\hbar^2} \psi \end{aligned}$$

- 1.) Versuch der Konstruktion einer Wellengleichung analog zu klassischen Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi &\stackrel{?}{=} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi \\ \Rightarrow \left[-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{E^2}{v^2 \hbar^2} \right] \psi &= 0 \\ \Rightarrow E^2 &= p^2 v^2 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $E = p^2/2m$. Die Konstruktion analog zur klassischen Wellengleichung ist also erfolglos.

- 2.) Versuch (Schrödinger):

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} \psi &= E \psi \\ p &\triangleq i\hbar \partial_x \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi = E \psi = i\hbar \partial_t \psi \quad (1.17)$$

Dies ist die *Schrödingergleichung im feldfreien Raum*.

Zu beachten ist hierbei, dass $\partial_t \psi$ vollständig durch ψ bestimmt ist. Somit ist mit der Wellenfunktion ψ der Zustand eines Systemes *vollständig* beschrieben, im Gegensatz zur klassischen Wellengleichung bei der zwei Anfangsbedingungen nötig sind.

Differentialoperator

$$\underbrace{(i\hbar\partial_x)}_{\hat{p}} \psi(x, t) = p\psi(x, t)$$

Die Gleichung gilt nur bei ebenen Wellen (freie Teilchen) und stellt eine Eigenwertgleichung dar. Hierbei ist \hat{p} der *Impulsoperator* und p ein Eigenwert.

Die eindimensionale *Schrödingergleichung mit ortsabhängigem Potential* $V(x)$ lautet:

$$\boxed{i\hbar\partial_t \psi(x, t) = \underbrace{\left\{ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\}}_{\text{Hamiltonoperator } \hat{H}} \psi(x, t)} \quad (1.18)$$

Die Kurzdarstellung sieht wie folgt aus:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \quad (1.19)$$

Die Gleichung wird auch also *zeitabhängige Schrödingergleichung* bezeichnet.

Zum Lösen der Differentialgleichung wird der Ansatz der »Separation der Variablen« verwendet:

$$\psi(x, t) = u(x)f(t)$$

Hierbei ist $u(x)$ der ortsabhängige- und $f(t)$ der zeitabhängige Anteil. Dieser Ansatz wird in die Schrödingergleichung eingesetzt und differenziert.

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t(u(x)f(t)) &= \hat{H}(u(x)f(t)) = f(t)\hat{H}u(x) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{i\hbar}{f(t)}}_{\text{zeitabhängig}} &= \underbrace{\frac{1}{u(x)}\hat{H}u(x)}_{\text{ortsabhängig}} \end{aligned}$$

Somit haben wir die Differentialgleichung in zwei Differentialgleichungen in $u(x)$ und $f(t)$ separiert. Für den linken Teil gilt:

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} = \text{const}$$

Mit Hilfe der Integration löst sich das Problem:

$$\begin{aligned} i\hbar \int_0^t dt \frac{\partial f}{f \partial t} &= \int_0^t \text{const} dt \\ \Rightarrow i\hbar \ln(f(t)) &= \text{const} \cdot t \end{aligned}$$

Durch exponentieren¹ folgt:

$$f(t) = A \exp\left(\frac{\text{const} \cdot t}{i\hbar}\right) = A \exp(-i\omega t)$$

Mit $\omega = c/\hbar$ gilt für die Gleichung in $u(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(x)} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} u(x) &= E \\ \Rightarrow u''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} \{E - V(x)\}}_{=k^2(x)} u(x) &= 0 \end{aligned}$$

Somit erhält man für die Ortskomponente analog zur Optik die sogenannte *Helmholtzgleichung*:

$$u''(x) + k^2(x)u(x) = 0$$

Diese reelle Gleichung kann nur reelle Lösungen haben. Man setzt ein *ortsunabhängiges* Potential an

$$V(x) = \text{const},$$

somit ist

$$k(x) = \text{const} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}.$$

Dann ist $u(x) = \alpha \exp(ikx)$ eine spezielle Lösung für freie Teilchen.

$$u'(x) = iku(x)$$

$$u''(x) = -k^2u(x)$$

Für ein konstantes Potential ist

$$\psi = u(x)f(t) = A \exp(i(kx - \omega t))$$

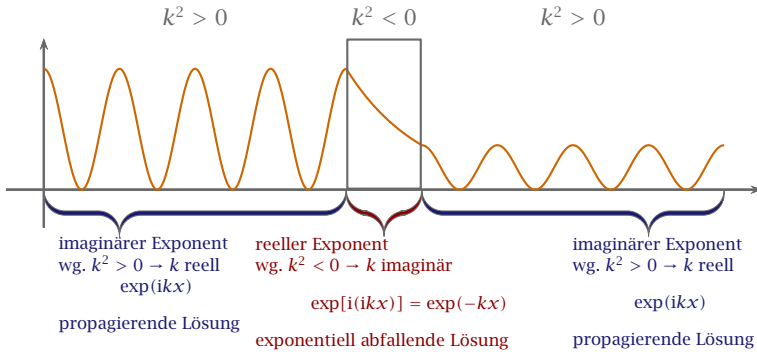
eine Lösung der Schrödingergleichung.

¹Neologismus von Prof. Dr. H. Giessen, eigentlich potenzieren

Bemerkung: Ein freies quantenmechanisches Teilchen entspricht einer ebenen Welle!→

Die Lösung lautet somit

$$\psi(x, t) = u(x)f(t) = A \exp(i(kx - \omega t)).$$



Das Wellenpaket ist Lösung der Wellengleichung. Wie bei den elektromagnetischen Wellen gilt eine Fourierrelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Mit

$$p = \hbar k$$

folgt

$$\Delta p = \hbar \Delta k$$

Dies führt auf die *Heisenbergsche Unschärferelation*:

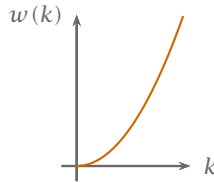
$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar} \quad (1.20)$$

Zur Interpretation der Wellenfunktion ψ

Beobachtung: Wellenpakete zerfließen! →

Für ein freies Teilchen mit kinetischer Energie E_{kin} gilt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar \omega$$



Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{\hbar}{m} \neq 0.$$

Dies ist die zweite Ableitung der Dispersionsrelation. Es zeigt sich, dass die Krümmung reziprok zur Masse ist, also:

$$\text{Krümmung} \propto \frac{1}{\text{Masse}}$$

Das heißt, dass Objekte mit großer Masse langsamer »zerfließen«.

► **Beispiel** Ein Elektron mit Ortsschärfe von $\Delta x(t=0) = 1 \text{ \AA}$. Da

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

$$\Delta x \cdot m \cdot \Delta v \geq \hbar$$

hat nach nur $10 \mu\text{s}$ das Elektron eine Ortsunschärfe von 10 m. ◀

Im Experiment misst man aber nur punktförmige Teilchen. Nach der »Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik« gibt die Größe

$$\psi(x, t) \psi^\dagger(x, t) dx = |\psi(x, t)|^2 dx$$

der »Elektronenwelle« die Wahrscheinlichkeitsdichte an, ein Teilchen zum Zeitpunkt t im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden. Es gelten folgende Eigenschaften:

- ▶ $|\psi|^2$ ist nicht direkt messbar, da es eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt. Erst für viele gleich präparierte Teilchen ist es messbar (Ähnlich wie $I \propto |E|^2$ bei elektromagnetischen Wellen).
- ▶ ψ eines einzelnen Teilchens ist nicht messbar im Gegensatz zum elektrischen Feld.

- ▶ ψ beschreibt was wir über ein Teilchen wissen.
- ▶ Da das Teilchen irgendwo im Raum sein muss, gilt

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dV \quad \text{Normierungsbedingung}$$

- ▶ Daraus folgt, dass physikalisch sinnvolle Lösungen quadratintegrierbar sein müssen, d.h. dass das Integral des Betragsquadrates von $-\infty$ bis ∞ ein endlicher Wert sein muss, damit die Funktion normierbar ist.
- ▶ $|\psi|$ hat die Einheit:

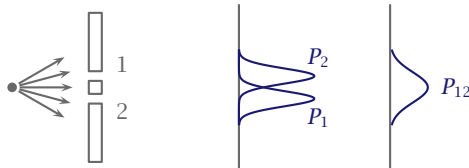
$$\text{eindimensional:} \quad [|\psi|^2] = \frac{1}{m} \Rightarrow [\psi] = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\text{dreidimensional:} \quad [|\psi|^2] = \frac{1}{m^3} \Rightarrow [\psi] = \frac{1}{m^{3/2}}$$

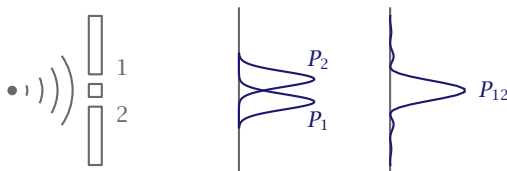
- ▶ $|\psi|^2$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte
- ▶ $|\psi|^2 dV$ ist eine Wahrscheinlichkeit

Doppelspaltexperimente

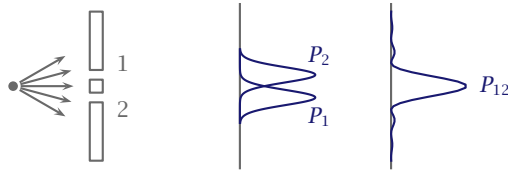
Wird von einer Punktquelle ausgegangen, wobei mit Kugeln (z.B.: Schrot) das Experiment durchzuführen ist, erhält man folgende Anordnung:



Wird von einer Punktquelle ausgegangen, wobei mit Licht/Wellen das Experiment durchzuführen ist, erhält man folgende Anordnung:



Wird von einer Punktquelle ausgegangen, wobei mit Elektronen das Experiment durchzuführen ist, erhält man folgende Anordnung:



Elektronen werden als einzelne Teilchen am Detektor gemessen. Bei vielen Elektronen ergibt sich das Interferenzmuster.

Mittelwert, Wahrscheinlichkeit, Fluktuationen

Für den *Mittelwert* gilt:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \{a, b\} \\
 \Rightarrow \langle w_1 \rangle &= \frac{a + b}{2} \\
 w_2 &= \{a, a, b, a, c, d, c, a, b, d, d, c, d, a, a\} \\
 \Rightarrow \langle w_2 \rangle &= \frac{6a + 2b + 3c + 4d}{15} \\
 &= \frac{6}{15}a + \frac{2}{15}b + \frac{3}{15}c + \frac{4}{15}d
 \end{aligned}$$

Die Brüche (z.B.: 6/15) bezeichnen die *Wahrscheinlichkeit* für die jeweilige Variable. Allgemein gilt die Formel:

$$\langle w \rangle = \Pi(a)a + \Pi(b)b + \Pi(c)c + \Pi(d)d$$

Π beschreibt hierbei die jeweilige Wahrscheinlichkeit einer Variablen.

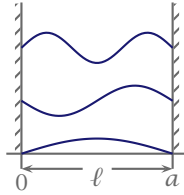
$$\begin{aligned}
 w &= \{a_i : i = 1 \dots n, \Pi(a_i)\} \\
 \Rightarrow \langle w \rangle &= \sum_{i=1}^n \Pi(a_i)a_i
 \end{aligned}$$

Es ist klar, dass immer gelten muss;

$$\sum_{i=1}^n \Pi(a_i) = 1$$

Elektron im Kastenpotential

Gehen wir zur Quantenmechanik und betrachten ein *Elektron im Kastenpotential*:



Für das Teilchen im Potentialkasten gilt folgendes Potential:

$$E_{\text{pot}} = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq x_0 \leq a \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Gebiet $0 \leq x_0 \leq a$ gilt für ein freies Teilchen $E_{\text{pot}} = 0$.

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi + k^2 \psi = 0, \quad k^2 = \frac{2E}{\hbar^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\psi = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$$

Das Teilchen, kann die Bereiche $x < 0$ und $x > a$ nicht erreichen, d.h.

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 & A + B &= 0 \\ \psi(a) &= 0 & A \exp(ika) + B \exp(-ika) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi &= A(\exp(ika) - \exp(-ika)) \\ &= 2iA \sin(kx) \\ &= 2iA \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ka = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

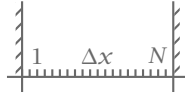
$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi_n(x) &= 2iA \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \\ &= c \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n &= \frac{2a}{n} \\ k_n &= \frac{n\pi}{a} \end{aligned}$$

Die Schrödingergleichung liefert:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Der Term $\sqrt{2/L}$ bezeichnet hierbei die *Normierungskonstante*.



Die Wahrscheinlichkeit das Elektron in der j -ten Box zu finden ist gegeben durch:

$$\Pi(j) = \underbrace{\psi^*(x_j, t)\psi(x_j, t)}_{=|\psi_j|^2}$$

Somit erhält man für den Mittelwert der Position:

$$\langle x \rangle = \sum_{j=1}^N \Pi(j)x_j = \sum_{j=1}^N \psi_j^* x_j \psi_j \cdot \Delta x$$

Im Fall für $\lim_{N \rightarrow \infty}$ folgt:

$$\langle x \rangle = \int \psi^*(x, t) x \psi(x, t) dx$$

Wichtig ist, dass im Allgemeinen gilt:

$$\langle x \rangle^2 \neq \langle x^2 \rangle$$

Der Mittelwert des Impulses ist gegeben durch:

$$\langle \hat{p} \rangle = \int \psi^*(x, t)(-i\hbar\partial_x)\psi(x, t) dx$$

Dabei ist die Positionierung des Differentialoperators wichtig:

$$\begin{aligned} \int \psi^*(x, t)\hat{p}\psi(x, t) dx &\neq \int \hat{p}\psi^*(x, t)\psi(x, t) dx \\ \langle \hat{p} \rangle &= \int \psi^*(-i\hbar\partial_x)\psi dx \\ &= \dots = 0 \end{aligned}$$

Allgemein gilt für den Erwartungswert eines Operators:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^*(x, t)\hat{A}\psi(x, t) dx$$

Fluktuationen am Beispiel eines Würfels

Bei einem Würfel treten die Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Der Erwartungswert beträgt hierbei:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{6} \sum_i \alpha_i = 3.5$$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung vom Mittelwert? \rightarrow

Hier ist der Mittelwert eine ganze Zahl, da der Würfel nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 liefert, d.h. der Mittelwert wird nie gemessen. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung $P = 1$.

Frage: Um welchen Wert wird im Mittel der gemessene Wert vom Mittelwert abweichen? \rightarrow

$$\langle \delta_\alpha \rangle = \langle \alpha - \langle \alpha \rangle \rangle = \langle \alpha - 3.5 \rangle = \langle \alpha \rangle - \langle 3.5 \rangle = 0$$

Somit sieht man, dass dieser Mittelwert immer für symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen verschwindet.

Varianz als zweites Mittel der Verteilung:

$$\begin{aligned} \langle (\delta_\alpha)^2 \rangle &= \langle (\alpha - \langle \alpha \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle \alpha^2 - 2\alpha\langle \alpha \rangle + \langle \alpha \rangle^2 \rangle \\ &= \langle \alpha^2 \rangle - \langle 2\alpha\langle \alpha \rangle \rangle + \langle \langle \alpha \rangle^2 \rangle \\ &= \langle \alpha^2 \rangle - 2\langle \alpha \rangle \langle \alpha \rangle + \langle \alpha \rangle^2 \\ &= \langle \alpha^2 \rangle - \langle \alpha \rangle^2 \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt der linke Wert den »Mittelwert der Quadrate« und der rechte Wert den »Mittelwert der verschiedenen Werte«. Für den Würfel gilt:

$$\langle (\delta_\alpha)^2 \rangle = \frac{35}{12} \approx 2.9$$

In der Quantenmechanik ist der Wert, der der Wurzel aus der Varianz entspricht, die sogenannte *Ortsunschärfe*

$$\Delta x = \sqrt{\langle (\delta_\alpha)^2 \rangle}.$$

► *Beispiel* Berechne Δx für ψ_2 im Kastenpotential:

$$\begin{aligned} \langle (\delta_x)^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= L^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \right) - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \\ &= L^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2} \right) \\ \Delta x &= \sqrt{\langle (\delta_x)^2 \rangle} \\ &= L \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2}} \end{aligned}$$

Genauso kann man die Impulsunschärfe Δp für ψ_2 berechnen:

$$\begin{aligned} \langle (\delta_p)^2 \rangle &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \\ &= \langle p^2 \rangle - 0 \\ &= \int \psi_2^*(x, t) (-i\hbar \partial_x)^2 \psi_2(x, t) dx \\ &= \left(\frac{\hbar 2\pi}{L} \right)^2 \\ \Delta p &= \sqrt{\langle (\delta_p)^2 \rangle} = \frac{2\pi\hbar}{L} \end{aligned}$$

Nimmt man das Produkt

$$\Delta x_{\psi_2} \cdot \Delta p_{\psi_2} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{3} - 2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Die *Heisenbergsche Unschärferelation* lautet dementsprechend wie folgt:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}} \quad (1.21)$$

Mit dieser Relation kann man zum Beispiel die Größe eines Atomkerns abschätzen:

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$$

Für die Bindungsenergie eines Photons im Kern kann von $\approx 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ausgegangen werden.

$$E = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{2mE}$$

mit $\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p}$ folgt durch einsetzen:

$$\Delta x \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{ m} \approx 5 \text{ fm}$$

Dies entspricht ungefähr der Größenordnung der Kerngröße.

Vertauschungsrelationen

Man definiert den *antisymmetrischen Kommutator*:

Für den *fermionischen Kommutator*, der nur für Teilchen mit halbzahligem Spin gilt, folgt:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]_- = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Für den *bosonischen Kommutator*, der nur für Teilchen mit ganzzahligem Spin gilt (Photonen, Cooper-Paare), folgt:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

\hat{A} und \hat{B} sind hierbei Operatoren.

Atome können ganzzahligen Gesamtspin besitzen, das bedeutet, dass sogenannte »Bose-Einstein-Kondensate« möglich sind:

- ▶ Boson ${}^4_2\text{He}$ ($2n + 2p$)
- ▶ Fermion ${}^3_2\text{He}$ ($2p + 1n$)

Im Allgemeinen ist der fermionische (antisymmetrische) Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$

▶ *Beispiel* Drehung eines Quaders im Raum um die x - und y -Achse um 90° kommutieren nicht. ◀

▶ *Beispiel* Der Kommutator von \hat{x} und \hat{p} .

$$\begin{aligned} [\hat{p}, \hat{x}]\psi &= -i\hbar\partial_x x\psi + xi\hbar\psi \\ &= -i\hbar(\psi + x\partial_x\psi) + xi\hbar\partial_x\psi \\ &= -i\hbar\psi \\ \Rightarrow \boxed{[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar} & \quad (1.22) \end{aligned}$$

$$\boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar} \quad (1.23)$$

Setzt man dies in die Heisenbergsche Unschärferelation ein, so erhält man:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \left| \frac{[\hat{p}, \hat{x}]}{2} \right| \quad (1.24)$$

Dies lässt sich auf zwei Operatoren \hat{A} und \hat{B} verallgemeinern:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2} \right| \quad (1.25)$$

Allgemein gilt:

Wenn zwei Operatoren nicht miteinander vertauschen (also deren antisymmetrischer Kommutator nicht Null ist), dann können beide nicht gleichzeitig scharf gemessen werden (also können Δx und Δp , bzw. ΔA und ΔB nicht gleichzeitig Null sein).

Frage: Wann verschwindet die Fluktuation einer Größe A ? →

$$\langle \Delta A \rangle^2 \stackrel{!}{=} 0 \iff \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle$$

oder

$$\int \psi^* \hat{A}^2 \psi \, dx \stackrel{!}{=} \left(\int \psi^* \hat{A} \psi \, dx \right)^2$$

Eine hinreichende Bedingung hierfür ist:

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung, wobei ψ eine Eigenfunktion zum Operator \hat{A} ist und λ ein Eigenwert zur Wellenfunktion ψ .

Die Eigenwerte einer Matrix \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

werden mit dem charakteristischen Polynom berechnet:

$$\det(\mathcal{M} - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Ähnliche Matrix \mathcal{M}' :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ist ein System im Eigenzustand des Operators \hat{A} , dann kann A scharf gemessen werden $\iff \Delta A = 0$.

► **Beispiel** Für Eigenzustände ψ_n zu \hat{H} gilt die Eigenwertgleichung:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$$

Dies ist die *zeitunabhängige Schrödingergleichung*. E_n sind die Eigenwerte der Zustände ψ_n (Orbitale). ◀

Somit erhält man

$$\psi_n(t) = \psi(t=0) \exp\left(\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \quad (1.26)$$

und für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= |\psi(x, t)|^2 \\ &= \psi^*(x, 0) \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \psi(x, 0) \exp\left(\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \\ &= \psi^*(x, 0) \psi(x, 0) \\ &= |\psi(x, 0)|^2 \end{aligned}$$

Dies gilt für $P(x, t)$ für alle Zeit t .

Bemerkung: Alle Operatoren \hat{A} , die man mit \hat{H} vertauschen, entsprechen Erhaltungsgrößen. Wenn also

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0, \quad (1.27)$$

dann ist A eine Erhaltungsgröße. ◀

► **Beispiel** ► Drehimpuls: $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

► Drehimpulsoperator: $\hat{\ell} = i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$

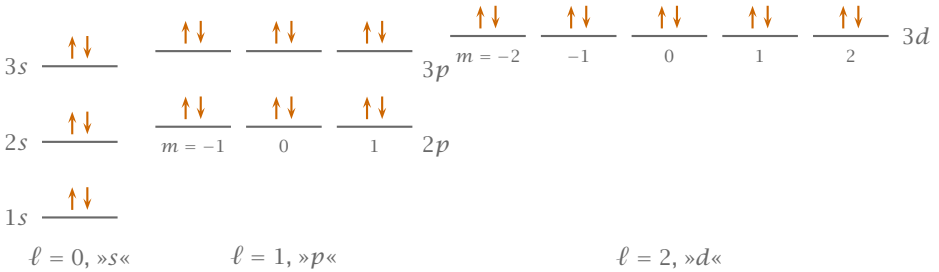
Im Zentralpotential $V = V(|\mathbf{r}|) = V(r)$ ist der Betrag des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße:

$$[\hat{H}, \hat{\ell}^2] = 0$$

Daraus folgt:

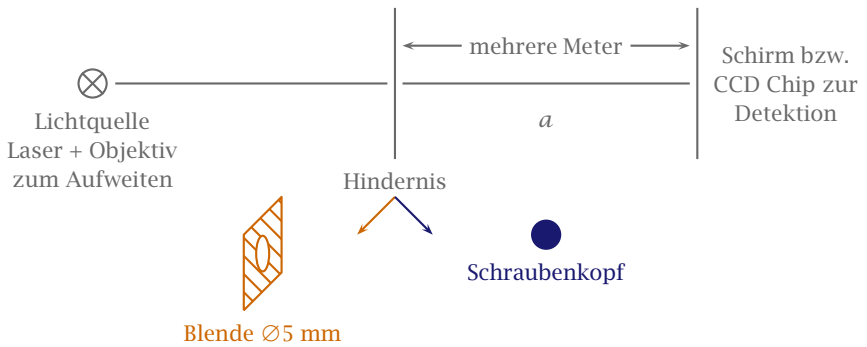
- Energie und Drehimpuls können gleichzeitig und unabhängig voneinander scharf gemessen werden.
- Es gibt Zustände, die gleichzeitig Eigenzustände zu \hat{H} und $\hat{\ell}$ sind.
- Ein stationärer Zustand kann durch weitere Größen, wie zum Beispiel die Eigenwerte des Drehimpulses oder durch die Projektion des Drehimpulses auf die z -Achse ℓ_z charakterisiert werden. (Quantenzahlen)

► **Beispiel** Orbitale im Wasserstoffatom: $3s, 3p, 3d, \dots$ ◀



1.2.2 Überlagerung (Interferenz) von Materiewellen

Ein klassisches, optisches Experiment stellt der *Poisson'sche Fleck* dar. Der Versuch ist wie folgt aufgebaut:



Mit Blende:



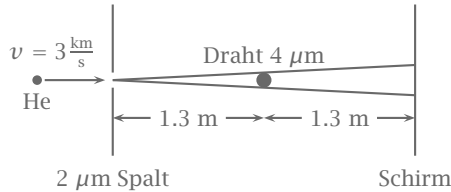
Der dunkle Poisson'sche Fleck lässt sich von dunkel nach hell ändern, je nach Blendendurchmesser bzw. Abstand von Hindernis und Schirm.

Mit Schraubenkopf:



Bemerkung: Der Poissonsche Fleck und die Fresnel'schen Beugungsringe sind eine direkte Manifestation der Wellennatur des Lichts. \rightarrow

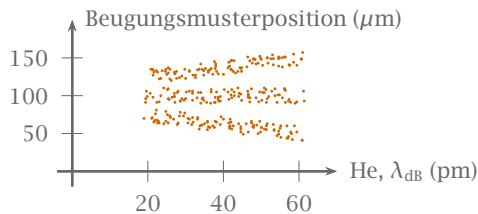
Das Experiment von T. Pfau und J. Mlyneck ('97 Konstanz) zum Nachweis der Wellennatur von Heliumatomen ist wie folgt aufgebaut:



Bemerkung: Der Poissonfleck ist die Manifestation der konstruktiven Interferenz der Materiewellen. \rightarrow

Die de Broglie-Wellenlänge ist einstellbar (durch die Geschwindigkeit v):

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$



Evolution der Messung

Das statistische Ensemble wird nach genügend langer Zeitdauer das Interferenzmuster herausbilden. Dasselbe funktioniert auch mit einzelnen Photonen (stark abgeschwächte Lichtquelle).

Dadurch manifestiert sich die Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik ($|\psi|^2 \hat{=} \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$)

Hidden Parameters? Gedankenexperiment:

Auf den Hörsaalboden sind rote Streifen gemalt, alle Studenten betreten den Raum durch die beiden Türen. Sie stellen sich auf die Streifen. Eine CCD Kamera an der Decke mit Farbfilter sieht die roten Streifen nicht. Der Beobachter der Kameraaufnahme sieht nur das statistische Ensemble der Studenten sich entwickeln (als IF Muster). \rightarrow

2

LICHT-MATERIE-WECHSELWIRKUNG

2.1 Makroskopische Beschreibung (Maxwellgleichungen in Materie)

Die *Maxwellgleichungen in Materie* lauten:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = -\operatorname{div} \mathbf{P} + \varrho \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} (\mu_0 \mathbf{H}) = -\operatorname{div} (\mu_0 \mathbf{M}) \quad (2.4)$$

Hierbei beschreibt \mathbf{P} die Polaritätsdichte, \mathbf{M} die Magnetisierungsdichte, ϱ die freie Ladungsdichte und \mathbf{j} die freie Stromdichte.

Lineare Optik

Für die Polarisierung gilt:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

Hierbei ist χ der elektrische Suszeptibilitätstensor (Matrix 3×3) in isotropen Medien wie z.B.: Glas.

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \chi$$

Nichtlineare Optik

$$\mathbf{P}_{\text{ges}} = \mathbf{P}_{\text{lin}} + \mathbf{P}_{\text{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \varepsilon_0 (\chi^{(2)} \mathbf{E}) \mathbf{E} + \varepsilon (\chi^{(3)} \mathbf{E}) \mathbf{E} \mathbf{E}$$

Hierbei sind $\chi^{(2)}$ und $\chi^{(3)}$ Tensoren.

Wenn $E \sim E_0 \exp(i\omega t)$ ist, dann schwingt P_{lin} mit der Frequenz ω .

$$P_{\text{NL}} = P^{(2)} + P^{(3)}$$

$$P^{(2)} : \quad 2\omega, \omega = 0; \text{ SHG optische Gleichrichtung}$$

$$P^{(2)} : \quad 3\omega; \text{ THG}$$

Im Folgenden wird nur die lineare Optik betrachtet mit:

$$\mathbf{P} = c_0 \chi \mathbf{E}$$

Für die *dielektrische Verschiebungsdichte* D gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

Hierbei entspricht der Term $\epsilon = (1 + \chi)$ der *relativen elektrischen Permittivität* (Tensor).

Durch analoge Überlegung folgt für das magnetische Feld:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}$$

Im optischen Bereich ist die Magnetisierung M annähernd Null, so dass Allgemein gilt:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

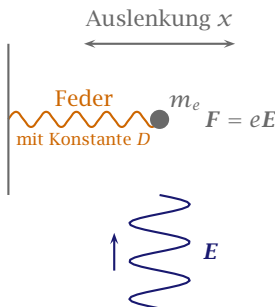
Hierbei entspricht $\mu = 1 + \chi_m$ der *magnetischen Suszeptibilität*.

2.2 Mikroskopische Beschreibung von Licht-Materie-Wechselwirkung (Lorentz-Oszillator)

Für den *Brechungsindex* n gilt:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_0}{n} \\ n &= \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \chi} \end{aligned}$$

Hierbei ist n von den Licht-Eigenschaften und ϵ von den Materie-Eigenschaften abhängig.



Die Polarisationsdichte ist die vektorielle Summe über alle mikroskopischen Dipolmomente pro Einheitsvolumen:

- ▶ Ausrichtung bestehender Dipole in Flüssigkeiten/Gasen (Dipol-, Orientierungspolarisation)
- ▶ Verschiebung von Ionen in Kristallen (Ionenpolarisation)
- ▶ Änderung der Ladungsverteilung von Elektronen in Atomen (elektronische Polarisation)

Aufgrund der Trägheit der Ladungsträger folgt die Polarisation der Änderung des Feldes nicht instantan. Bei optischen Frequenzen spielt die Orientierungspolarisation keine Rolle (elektronische Polarisation).

Modell des harmonischen Oszillator (Lorentz-Drude-Modell)

Folgende Differentialgleichung des harmonischen Oszillators nach dem *Lorentz-Drude-Modell* wird hier betrachtet:

$$m_e \ddot{\mathbf{x}} + b \dot{\mathbf{x}} + a \mathbf{x} = e \mathbf{E}(t).$$

Die Lorentzkraft

$$F_L = -e \mathbf{x} \times \mathbf{B}$$

im optischen Bereich ist wesentlich kleiner als die Coulomb-Kraft

$$F_C = -e \mathbf{E}$$

und wird vernachlässigt.

Für die Auslenkung folgt somit:

$$\mathbf{x}(\omega) = \frac{-e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma} \mathbf{E}(\omega)$$

Wobei für die Konstanten Γ und ω_0 gilt:

$$\omega_0^2 = \frac{a}{m_e}$$

$$\Gamma = \frac{b}{m_e}$$

Für das induzierte Dipolmoment \mathbf{p} folgt somit:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\omega) &= -e\mathbf{x}(\omega) \\ &= \frac{e^2/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}\mathbf{E}(\omega)\end{aligned}$$

Die Gesamtpolarisationsdichte \mathbf{P} bei einer Teilchenanzahl von n_e lautet somit:

$$\mathbf{P}(\omega) = n_e \frac{e^2/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}\mathbf{E}(\omega)$$

Die Polarisationsdichte stellt eine Reaktion auf das elektrische Feld dar.

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \varepsilon_0\tilde{\chi}\mathbf{E} \\ \Rightarrow \tilde{\chi}(\omega) &= \chi' + i\chi'' \\ &= \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}\end{aligned}$$

Pemittivität:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= 1 + \tilde{\chi} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ \varepsilon' &= 1 + \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \\ \varepsilon'' &= -\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}\end{aligned}$$

ε' wächst (außerhalb der Resonanz) mit der Frequenz an (normale Dispersion). In der Nähe der Resonanz ist $d\varepsilon'/d\omega < 0$ (anomale Dispersion).

ε'' beschreibt einen annähernd glockenförmigen Verlauf um die Resonanz ω_0 wobei die Breite durch Γ bestimmt wird.

In der Nähe der Resonanz gilt:

$$\begin{aligned}\omega &\approx \omega_0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) &= (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \\ \omega\Gamma &\approx \omega_0\Gamma\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\omega) &\approx \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{2\omega_0[(\omega_0 - \omega) + i\Gamma/2]} \\ \varepsilon' &\approx 1 + \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{(\omega_0 - \omega)/(2\omega_0)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \\ \varepsilon'' &\approx -\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\Gamma/(4\omega_0)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4}\end{aligned}$$

$|\varepsilon''| = |\chi''(\omega)|$ wird als Lorentz-Profil bezeichnet. Das Maximum existiert bei $\omega = \omega_0$:

$$|\chi'_{\max}| = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega_0 \Gamma}$$

bei $|\omega_0 - \omega| = \Gamma/2$ hat $|\chi'|$ den halben Maximalwert (FWHM) der Bereich $|\omega_0 - \omega| < \Gamma/2$ ist der Bereich negativer Dispersion.

Absorption und Reflexion

$$E(t) = E(\omega) \exp(-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t))$$

Komplexe Wellenzahl:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''} = \tilde{n}k_0$$

Komplexe Ausbreitungsrichtung:

$$\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''} = n - i\kappa$$

Somit gilt also:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= n^2 - \kappa^2 \\ \varepsilon'' &= -2n\kappa \\ \Rightarrow 4n^2 - 4n\varepsilon' - \varepsilon''^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind somit:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2} [(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)^{1/2} + \varepsilon'] \\ \kappa^2 &= \frac{1}{2} [(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)^{1/2} - \varepsilon'] \\ \Rightarrow E(\omega) \exp(-i\tilde{k}z) &= E_0 \exp(-\kappa k_0 z) \exp(-in k_0 z) \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass der Imaginärteil κ des Ausdrucks $\exp(-\kappa k_0 z)$ die Absorption bewirkt.

Die Intensität ist proportional zum Amplitudenquadrat:

$$\frac{I(z)}{I(0)} = \exp(-2\kappa k_0 z) = \exp(-\alpha z)$$

mit $\alpha = 2\kappa k_0$, Absorptionskoeffizient

$$\exp(-inK_0z) \rightarrow \text{Phasengeschwindigkeit } v_{ph} = \frac{c_0}{n}$$

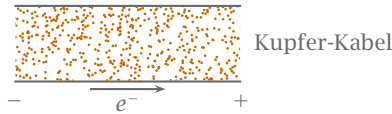
Reflexivität absorbierender Medien

Für einen senkrechten Einfall gilt:

$$R = \left| \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \right|^2$$

Unter der Annahme, dass $n_i = 1$ und $\tilde{n}_t = n - i\kappa$ ist, folgt:

$$R = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2}$$

Freies Elektronengas-Modell der Metalle (Drude Modell)

Da die Elektronen in Metallen frei sind, gibt es keine Rückstellkraft (Federkonstante = 0). Es gilt die Differenzialgleichung des harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x} + \underbrace{\gamma}_{=0}\dot{x} + D x = F \cos(\omega t)$$

Mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 0$$

Das Drude Modell ist analog zum Lotertzmodell mit $\omega_0 = 0$. Somit folgt für ε' und ε'' :

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 + \Gamma^2}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\Gamma}{\omega^2 (\omega^2 + \Gamma^2)}$$

2.1 *Frage:* Was ist der Ursprung der Dämpfung Γ ? →

Ursprung der Dämpfung sind Stoßprozess, die mit einer mittleren Stoßzeit τ_e erfolgen (Drude Modell).

Wird angenommen, dass $F = 0$ so lautet die Differentialgleichung und deren Lösung für die Geschwindigkeit v :

$$\frac{d^2}{dt^2}x = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = -\frac{e}{m\Gamma}E$$

Wird angenommen, dass nach jedem Stoß eine zufällig verteilte Geschwindigkeit vorliegt, so ist die mittlere Geschwindigkeit das Produkt aus Beschleunigung und mittlerer Stoßzeit ($v = at$).

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{e}{m}E\tau_e$$

Der Zusammenhang zwischen Dämpfung Γ und mittlerer Stoßzeit τ_e ist

$$\Gamma = \frac{1}{\tau_e}.$$

Für die Stromdichte gilt

$$\mathbf{j} = -n_e e \dot{\mathbf{x}} = \frac{n_e e^2}{\Gamma m} E$$

Hierbei ist n_e die Ladungsdichte.

Das *ohmsche Gesetz* lautet

$$\mathbf{j} = \sigma_e E.$$

Hierbei ist σ_e die Leitfähigkeit eines Stoffes. Für die Dämpfung folgt somit

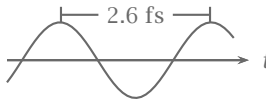
$$\Gamma = \frac{1}{\tau_e} = \frac{n_e e^2}{\sigma_e m}$$

► *Beispiel* Für Aluminium ist $\sigma_e = 36 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m}$ und $n_e = 0.18 \cdot 10^{30} \frac{1}{m^3}$.

$$\tau_e = 7 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

$$= 7 \text{ fs}$$

Rotes Licht hat im Vergleich dazu eine Wellenlänge von 800 nm und eine Periodendauer von 2.6 fs.



Man führt die *Plasmafrequenz* ein, welche wie folgt definiert ist:

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$$

Hierbei entspricht n_e der Dichte der Elektronen.

Umschreiben der Real- und Imaginärteile der dielektrischen Permittivität:

$$\epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau_e^2}{1 + \omega^2 \tau_e^2}$$

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{\omega_p^2 \tau_e^2}{\omega (1 + \omega^2 \tau_e^2)}$$

► *Beispiel* Für Aluminium bedeutet dies:

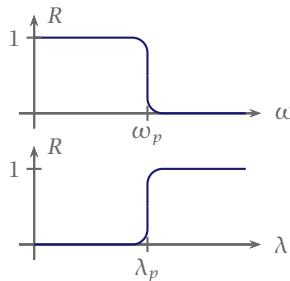
$$\omega_p = 24 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\lambda_p = 78 \text{ nm}$$

$$E_p = 15.8 \text{ eV}$$

Für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz bedeutet dies, dass ein großer Imaginärteil von $\epsilon(\omega)$, starke Absorption und große Reflexion vorliegt (Herleitung durch Umrechnung von ϵ' und ϵ'' in n und κ). Es folgt

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{n} = 1 + \kappa.$$



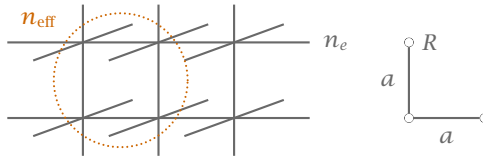
Für ein Frequenz, die oberhalb der Plasmafrequenz liegt $\omega > \omega_p$ ist $\omega \tau_e \gg 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon'(\omega) &\approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \epsilon''(\omega) \approx 0 \\ \Rightarrow n(\omega) &= \sqrt{\epsilon} \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \end{aligned}$$

Das heißt, dass bei sehr kurzen Wellenlängen unterhalb der Plasmafrequenz (tiefes UV, weiche Röntgenstrahlung) sich Metalle wie Dielektrika verhalten mit Brechungsindex

$$n(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}.$$

Metamaterial (künstliches Plasma mit Ladungsdichte n_{eff})



$$n_{\text{eff}} = \frac{R^2}{a^2} n_e$$

Solange die Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung ca $10\times$ größer ist als die Einheitszelle (Drahtabstand), sieht die Welle nur ein »effektives Medium« mit Ladungsdichte n_{eff} .

2.2.1 Kamers-Kronig-Relation

Die *Kramers-Kronig-Relation* stellt den Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil des Brechungsindex (Γ, κ), (ϵ', ϵ''), (χ', χ'') dar.

Vorausgesetzt wird eine Linearität zwischen P und E .

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') \epsilon_0 E(t') dt$$

Hierbei ist $h(t - t')$ eine Antwortfunktion.

Wir nehmen an, das ein harmonisch oszillierendes Feld $E(\omega) = \exp(i\omega t)$ vor liegt, so dass für das Integral folgt:

$$P(\omega) \exp(i\omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') \epsilon_0 E(\omega) \exp(i\omega t') dt'$$

Mit $t'' = t - t'$ folgt:

$$= \epsilon_0 E(\omega) \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t'') \exp(i\omega t'') dt''$$

Eine Fouriertransformation führt auf:

$$P(\omega) = H(\omega) \varepsilon_0 E(\omega)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$H(\omega)$ entspricht hierbei der dielektrischen Suszeptibilität, die sich in Real- und Imaginärteil, also einer komplexen Zahl darstellen lässt:

$$H(\omega) = \tilde{\chi} = \chi'(\omega) + \chi''(\omega).$$

Als Folge der Kausalität (keine Wirkung ohne Ursache) muss gelten:

$$h(t < 0) = 0.$$

Mit den Euler Formeln ergibt sich somit:

$$\chi'(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \cos(\omega t) dt$$

$$\chi''(\omega) = - \int_0^{\infty} h(t) \sin(\omega t) dt$$

Hierbei gelten folgende Tatsachen:

$$\chi'(-\omega) = \chi'(\omega) \quad \chi' \text{ ist eine gerade Funktion}$$

$$\chi''(-\omega) = -\chi''(\omega)$$

$$\Rightarrow \tilde{\chi}(-\omega) = \tilde{\chi}^*(\omega)$$

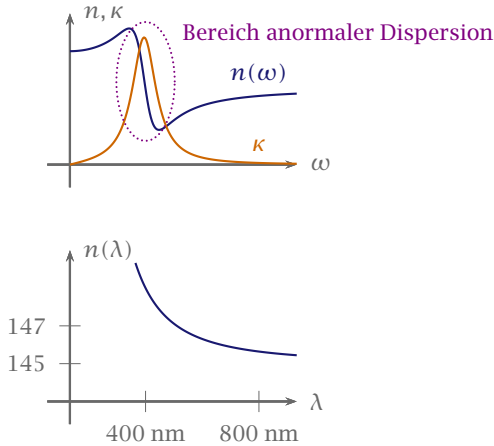
Somit folgt für $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\chi'(\omega) \cos(\omega t) - \chi''(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \chi'(\omega) \cos(\omega t) d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \chi''(\omega) \sin(\omega t) d\omega \end{aligned}$$

Nach einer langen Rechnung folgt die *Kramer-Kronig-Relation* für $\tilde{\chi}$. Der Imaginär- und Realteil lauten wie folgt:

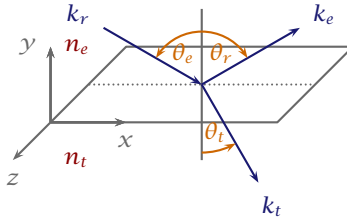
$$\chi'(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$



2.2.2 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Es wird angenommen, dass isotrope, isolierende und nicht magnetische Medien ($\mu = 1$) vorliegen.



Aus den Maxwellgleichungen folgen die Randbedingungen für die Stetigkeit der Felder.

- i.) Die Tangentialkomponente von \mathbf{E} und $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\mathbf{B}$ stetig an einer Grenzfläche.
- ii.) Die Normalkomponente von $\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}$ und \mathbf{B} sind stetig.

Somit folgt für die Felder:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{e,0} \cos(\omega_e t - \mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{e,0} \cos(\phi_e(\mathbf{r}, t))$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r,0} \cos(\omega_r t - \mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{r,0} \cos(\phi_r(\mathbf{r}, t))$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,0} \cos(\omega_t t - \mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{t,0} \cos(\phi_t(\mathbf{r}, t))$$

2.2.3 Reflexions- und Brechungsindex

Die Herleitung erfolgt über die Stetigkeit von Normalkomponente und \mathbf{D} und \mathbf{B} und Tangentialkomponente von \mathbf{E} und \mathbf{H} an der Grenzfläche (aus Maxwelldifferentialgleichung mit Randbedingungen). Die Stetigkeit führt zu:

$$E_{0,ex} \cos(\theta_e) + E_{0,rx} \cos(\theta_r) = E_{0,tx} \cos(\theta_t)$$

$$E_{0,ez} \cos(\theta_e) + E_{0,rz} \cos(\theta_r) = E_{0,tz} \cos(\theta_t)$$

Für alle \mathbf{r} mit $y = 0$ und für alle t ist

$$\omega_e t - \mathbf{k}_e \mathbf{r} = \omega_r t - \mathbf{k}_r \mathbf{r} = \omega_t t - \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Die Frequenz ist hierbei immer konstant:

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t = \omega$$

Weiterhin muss für $y = 0$ gelten:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) \mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{k}_e \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) \mathbf{r} = 0$$

Die Komponenten von \mathbf{k}_e und \mathbf{k}_r , die parallel zur Grenzfläche liegen, sind gleich

$$\mathbf{k}_{eG} = \mathbf{k}_{rG}.$$

Da $\omega_e = \omega_r$ ist und $k_e = k_r = \frac{\omega n_e}{c}$ folgt:

$$\begin{aligned} k_{eG} &= \frac{\omega n_e}{c} \sin(\theta_e) \\ &= k_{rG} = \frac{\omega n_e}{c} \sin(\theta_r) \end{aligned}$$

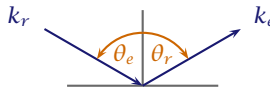
$$\Rightarrow \sin(\theta_e) = \sin(\theta_r)$$

Reflexionsgesetz i.) Der Wellenvektor des reflektierenden Lichtes ist in der Einfallsebene.

ii.) Der Ausfallwinkel θ_r ist gleich dem Einfallswinkel θ_e :

$$\theta_r = \theta_e$$

(mathematisch sauber eigentlich $\theta_r = -\theta_e$).



Analog für einen transmittierten Strahl gilt:

$$k_{eG} = k_{tG}.$$

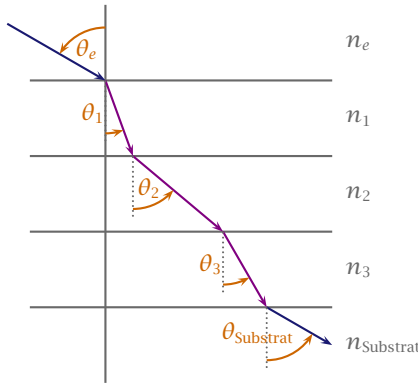
Es folgt also:

$$k_{eG} = \frac{\omega n_e}{c} \sin(\theta_e) = k_{tG} = \frac{\omega n_t}{c} \sin(\theta_t).$$

Daraus ergibt sich das so genannte *Snelliussche Brechungsgesetz*:

$$n_e \sin(\theta_e) = n_t \sin(\theta_t)$$

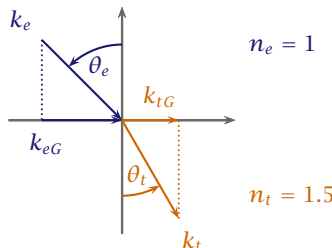
Die Stetigkeit der Tangentialkomponente von E führt direkt zur Erhaltungsgröße $n \sin(\theta)$.



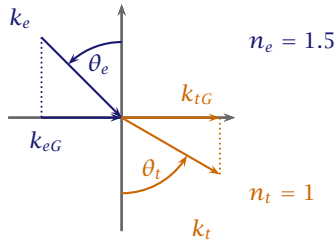
$$n_e \sin \theta_e = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 = n_{\text{Substrat}} \sin \theta_{\text{Substrat}}$$

Bemerkung: Es zeigt sich also, dass für die Berechnung des Ausfallwinkels (im Bild θ_{Substrat}) nur der Brechungsindex n_e (einfallend) und n_{Substrat} von Bedeutung ist, alle anderen Brechungsindize dienen lediglich zur »Verschiebung« des Strahles. \rightarrow

Der Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium sieht wie folgt aus:

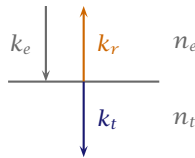


Der Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium sieht wie folgt aus:



2.2.4 Fresnel'sche Formeln für den Reflexionsgrad einer Grenzfläche

Betrachtet wird der Fall senkrecht einfallenden Lichtes.



$$\begin{aligned}
 E_{0,e} + E_{0,r} &= E_{0,t} & \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\
 \mathbf{B}_{0,e} + \mathbf{B}_{0,r} &= \mathbf{B}_{0,t} & \mathbf{k}_r &= -\mathbf{k}_e \\
 n_e E_{0,e} + n_e E_{0,r} &= n_e E_{0,t} & \mathbf{k}_t &= \frac{n_t}{n_e} \mathbf{k}_e
 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\mathbf{E}_{0,r} = \underbrace{\frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}}_{=r} \mathbf{E}_{0,e} = r \mathbf{E}_{0,e}.$$

r beschreibt hierbei den Amplituden-Reflexionskoeffizienten, der wie folgt definiert ist:

$$r = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}$$

Weiterhin folgt:

$$\mathbf{E}_{0,t} = t \mathbf{E}_{0,e}.$$

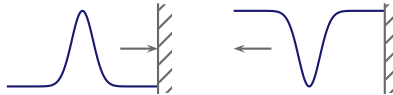
t beschreibt hierbei den Amplituden-Transmissionskoeffizienten, der wie folgt definiert ist:

$$t = \frac{2n_e}{n_e + n_t}$$

Fällt Licht vom optisch dichteren Medium auf eine Grenzfläche zum optisch dünneren Medium ($n_e > n_t$), so ist der komplexe Amplituden-Reflexionskoeffizient $r > 0$ und E_e und E_r sind in Phase ($\Delta\varphi = 0$), es findet also kein Phasensprung statt. Dies bezeichnet man auch als *Reflexion am losen Ende*.



Fällt Licht vom optisch dünneren Medium auf eine Grenzfläche des optisch dichteren Medium, so ist $n_e < n_t$ und wegen $r = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}$ ist r negativ! Das heißt, dass beide Felder gegenphasig sind, es erfolgt also ein Phasensprung von $\pi \hat{=} 180^\circ$. Man spricht auch von einer *Reflexion am festen Ende*.



Für den Reflexionsgrad gilt:

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_r}{I_e} = r \cdot r^* \\ &= |r|^2 \\ &= \left| \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t} \right|^2 \end{aligned}$$

► **Beispiel** Betrachtet wird die Grenzfläche Luft-Glas ($n = 1.5$) bei senkrechten Lichteinfall:

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{1 - 1.5}{1 + 1.5} \right|^2 \\ &= |0.2|^2 \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

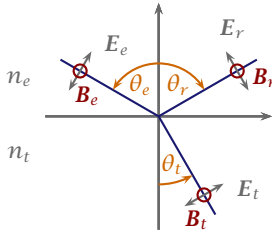
Die Rechnung zeigt, dass 4 % der Intensität (20 % der Amplitude des einfallenden E -Feldes) reflektiert werden. Es zeigt sich also folgendes Problem. Bei Objektiven mit vielen Linsen (z.T. bis zu 10) haben wir bis zu 20 Grenzflächen. D.h.

$$I_{\text{ges}} = I_e (1 - 0.04)^{20} = 0.44$$

Ohne Antireflexionsbeschichtung (»Vergütung«) kommt nur 44 % des einfallenden Lichtes durch. ◀

2.2.5 Reflexion von polarisierendem Licht

Bei p-polarisiertem Licht handelt es sich um Licht, bei dem der E -Feldvektor parallel zur Einfallsebene ist (aus Lot zur Grenzfläche und Einfallsvektor).



Die Komponentenerhaltung ergibt:

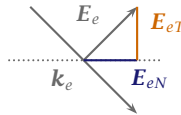
$$\begin{aligned}
 E_{e,T} &= E_e \cos(\theta_e) & E_{e,N} &= E_e \sin(\theta_e) \\
 E_{t,T} &= E_e \cos(\theta_t) & E_{t,N} &= E_e \sin(\theta_t) \\
 E_{r,T} &= E_e \cos(\theta_r) & E_{r,N} &= E_e \sin(\theta_r)
 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit für

$$E_{e,T} + E_{r,T} = E_{t,T}$$

liefert:

$$\cos(\theta_e)(E_e - E_r) = E_t \cos(\theta_t)$$



Die Stetigkeit für D_N (Normalkomponente) zeigt:

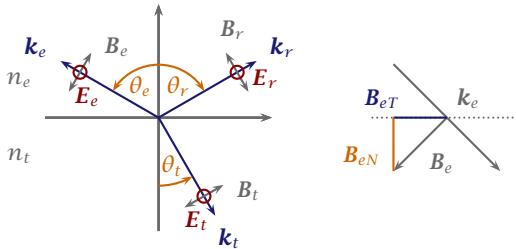
$$\begin{aligned}
 \epsilon &= n^2 \\
 \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} = n^2 \mathbf{E} \\
 \Rightarrow n_e^2 E_{e,N} + n_e^2 E_{t,N} &= n_t^2 E_{t,N} \\
 \Rightarrow n_e^2 \sin(\theta_e)(E_e + E_r) &= n_t^2 E_t \sin(\theta_t) \\
 \Rightarrow \frac{n_e}{n_t}(E_e + E_r) &= E_t
 \end{aligned}$$

Es folgt für den Amplituden-Reflexionskoeffizienten bei p-polarisiertem Licht:

$$r_p = \frac{E_r - n_t \cos(\theta_e) - n_e \cos(\theta_t)}{E_e - n_t \cos(\theta_e) + n_e \cos(\theta_t)}$$

com

2.2.6 Reflexion und Transmission von s-polarisiertem Licht auf einer Grenzfläche



Die Herleitung erfolgt analog zu p-polarisiertem Licht, jedoch mit B (das in der Einfallsebene liegt, anstatt mit E).

$$B_{eT} = -B_e \cos(\theta_e)$$

$$B_{eN} = -B_e \sin(\theta_e)$$

$$B_{tT} = -B_t \cos(\theta_t)$$

$$B_{tN} = -B_t \sin(\theta_t)$$

$$B_{rT} = B_r \cos(\theta_e)$$

$$B_{rN} = -B_r \sin(\theta_e)$$

Mit der Stetigkeitsbedingung, dass die Normalkomponenten von B und D stetig sind folgt:

$$\cos(\theta_e) (B_r - B_e) = -B_t \cos(\theta_t)$$

$$\sin(\theta_e) (B_e + B_r) = -B_t \sin(\theta_e)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{B_r}{B_e} &= \frac{n_e \cos(\theta_e) - n_t \cos(\theta_t)}{n_e \cos(\theta_e) - n_t \cos(\theta_t)} \\ &= \frac{E_r}{E_t} = r_s \end{aligned}$$

r_s entspricht hierbei dem Amplitudenreflexionskoeffizienten für ein s-polarisiertes E -Feld.

2.2.7 Fresnel'sche Formeln

Die Amplitudenreflexions- und transmissionskoeffizienten (*Fresnel'sche Formeln*) lauten wie folgt:

$$r_s = \frac{E_{rs}}{E_{es}} = \frac{n_e \cos(\theta_e) - n_t \cos(\theta_t)}{n_e \cos(\theta_e) + n_t \cos(\theta_t)} = \frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (2.5)$$

$$r_p = \frac{E_{rp}}{E_{ep}} = \frac{n_t \cos(\theta_e) - n_e \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_e) + n_e \cos(\theta_t)} = \frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)} \quad (2.6)$$

$$t_s = \frac{E_{ts}}{E_{es}} = \frac{2n_e \cos(\theta_e)}{n_e \cos(\theta_e) + n_t \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_e)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (2.7)$$

$$t_p = \frac{E_{tp}}{E_{ep}} = \frac{2n_e \cos(\theta_e)}{n_e \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_e)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_e)}{\sin(\theta_e + \theta_t) \cos(\theta_e - \theta_t)} \quad (2.8)$$

Für die Intensitäten gilt somit:

$$R_s = R_s \cdot r_s^*$$

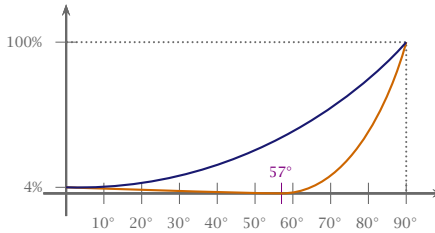
$$R_p = R_p \cdot r_p^*$$

$$T_s = t_s \cdot t_s^*$$

$$T_p = t_p \cdot t_p^*$$

R_s , bzw. R_p beschreibt hierbei das Reflexionsvermögen und T_s , bzw. T_p das Transmissionsvermögen.

Für die Reflexion beim Übergang von Luft in eine Glasplatte gilt:



Für den *Brewster Winkel* gilt:

$$\tan(\theta_B + \theta_t) \rightarrow \infty$$

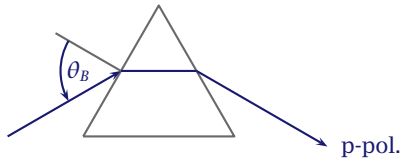
$$\theta_B + \theta_t = 90^\circ$$

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_e}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_e}\right)$$

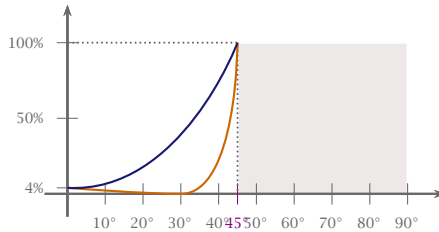
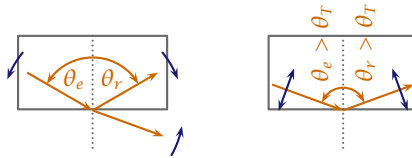
Beim Brewstereinkl θ_B als Einfallswinkel θ_e stehen reflektierter und transmittierter Strahl senkrecht zueinander und das reflektierte Licht ist vollständig s-polarisiert und das transmittierte Licht ist vollständig p-polarisiert.

► *Beispiel* Prisma:

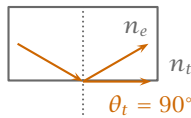


2.2.8 Reflexionsgrad an Grenzflächen bei Einfall aus dem optisch dichteren ins optisch dünnere Medium

Fällt Licht aus dem optisch dichteren Medium $n_e > n_t$ auf die Grenzfläche, so wird ab einen bestimmten Einfallswinkel $\theta_e = \theta_T$ (θ_T ist Winkel der Totalreflexion) da Reflexionsvermögen $R = 100\%$.



Der Totalreflexionswinkel θ_T ist gerade der Winkel, bei dem im Snelliusschen Brechungsgesetz $\sin(\theta_t) = 1$ wird ($\theta = 90^\circ$).



Somit ist

$$\sin(\theta_T) = \frac{n_t}{n_e} \rightarrow \theta_T = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_e}\right).$$

Bei Glas-Luft entspricht dies einen Winkel von $\theta_T = 41.8^\circ$.

Für größere Einfallswinkel $\theta_e > \theta_T$ gibt es im Snelliusschen Brechungsgesetz keine reellen Lösungen mehr. Wie sind bei dessen Herleitung davon ausgegangen, dass der Vektor \mathbf{k}_t eine reelle Komponente senkrecht zur Oberfläche besitzt. Man kann die Fresnel'schen Gleichungen trotzdem weiter benutzen, wenn man $\cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)}$ unter Verwendung des Brechungsgesetzes durch $\sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2(\theta_t)}$ ersetzt. Dieser Ausdruck wird für $\theta_e > \theta_T$ rein imaginär.

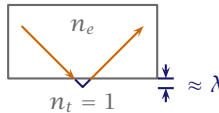
Die Intensitätsreflexionsgrade R in diesem Bereich ($\theta_e > \theta_T$) sind $R_s = R_p = 100\%$, während die Amplitudenreflexionskoeffizienten komplex werden.

$$R_s = r_s \cdot r_s^* = 1 \underbrace{\exp(i\varphi) \exp(-i\varphi)}_{=1} = 1$$

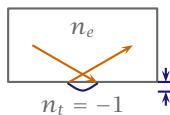


Goos-Hänchen-Shift

Goos-Hänchen-Shift: Laterale Verschiebung eines Lichtstrahls bei Totalreflexion



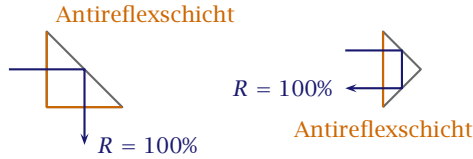
Evaneszentes Eindringen in den verbotenen Bereich



Negativer Goos-Hänchen-Shift bei einem Metamaterial

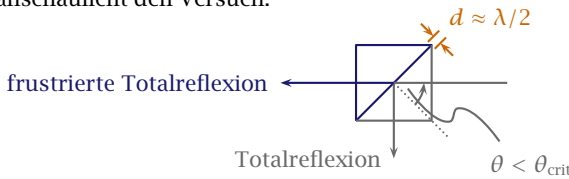
Dieser komplexe Amplitudenreflexionskoeffizient verursacht eine Phasenverschiebung φ bei der Totalreflexion, die von der Polarisierung des Lichtes abhängt. Dieses Phänomen kann mit Hilfe eines Fresnel-Rhombus zur Änderung der Polarisierung von Licht ausgenutzt werden.

Bei $\theta_e = \theta_B$ (Brewsterwinkel) verschwindet die Reflexion für p-polarisiertes Licht, d.h. dort tritt 100 % Transmission auf. Da bei der Totalreflexion $R = 100\%$ ist, wird dieser Effekt zur verlustfreien Ablenkung von Licht eingesetzt.



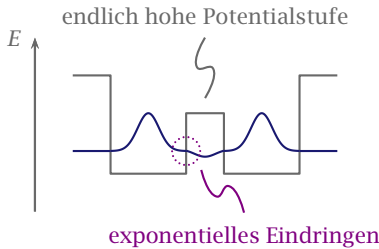
2.2.9 Totalreflexion und evaneszente Wellen

Das Experiment wird mit Licht im Mikrowellenbereich bei einer Frequenz von $\nu \approx 16$ GHz, also einer Wellenlänge von $\lambda \approx 3$ cm mit Paraffin durchgeführt. Folgende Abbildung veranschaulicht den Versuch:



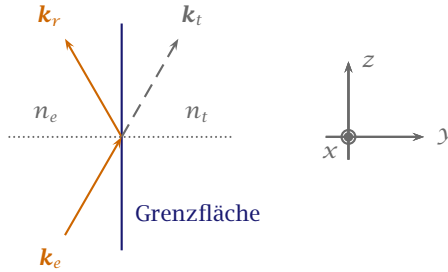
Der Versuch zeigt, dass Licht sich im erlaubten Medium wieder ausbreitet, nachdem es durch den »verbotenen« Bereich getunnelt ist.

Ein Analogon ist der quantenmechanische Tunneleffekt.



In einem endlich hohen Potentialtopf dringt die Wellenfunktion exponentiell in die Potentialwände ein.

Optische bedeutet dies:



$$k_{ex} = k_e \sin(\theta_e)$$

$$k_{ey} = k_e \cos(\theta_e)$$

Zur Berechnung von k_t wird zunächst folgendes betrachtet:

$$k_{tG} = k_{eG} = \frac{\omega}{c} n_e \sin(\theta_e)$$

Mit der Dispersionsrelation auf der Rückseite der Grenzfläche folgt:

$$k_t = \frac{\omega n_t}{c} = \sqrt{k_{tG}^2 + k_{t\perp}^2}.$$

Somit lässt sich die Komponente $k_{t\perp} = k_{ty}$ berechnen ($k_{t\perp}$ steht senkrecht zur Grenzfläche):

$$\begin{aligned} k_{t\perp}^2 &= \left(\frac{\omega n_t}{c}\right)^2 - k_{tG}^2 \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2(\theta_e)} \end{aligned}$$

Für $\theta_e > \theta_T$ gilt wegen des Brechungsgesetzes:

$$n_e \sin(\theta_e) > n_t.$$

Damit wird $k_{t\perp}$ im Bereich der Totalreflexion rein imaginär:

$$\begin{aligned} k_{t\perp} &= \pm i \sqrt{\frac{n_e^2}{n_t^2} \sin^2(\theta_e) - 1} = \pm i\beta \\ \Rightarrow \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}_{0,t} \exp(-\beta y) \exp(i(k_{tG}x - \omega t)) \end{aligned}$$

Der Term $\exp(-\beta y)$ verdeutlicht das exponentielle eindringend (tunnelnde, evaneszente) Feld in die »verbotene« Zone.

Die Welle $\mathbf{E}_{0,t} \exp(-\beta y)$ ist eine sogenannte »evaneszente Welle« oder »gebundene Oberflächenwelle« und existiert nur an der Grenzschicht.

Für die Abschätzung des Koeffizienten β betrachtet man:

$$n_e = 1.5 \quad (\text{Glas})$$

$$n_t = 1 \quad (\text{Luft})$$

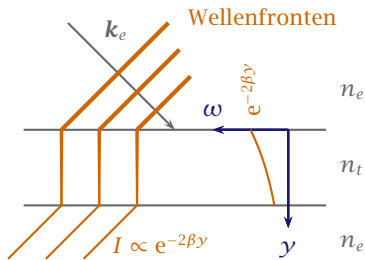
$$\theta_T = 41.8^\circ$$

$$\theta_e = 45^\circ$$

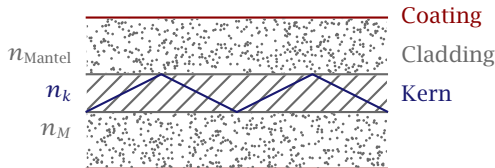
$$\lambda = 600 \text{ nm}$$

$$\beta = 3.7 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{mm}}$$

$$\frac{1}{\beta} = 300 \text{ nm} \approx \frac{\lambda}{2}$$



2.3 Lichtleitung und Glasfasern



Das **Coating** ist eine Schutzhülle aus Plastik, die um das **Cladding** herumgelegt ist und eine Dicke von ca. 1 mm hat. Das **Cladding** hat eine Stärke von $125 \mu\text{m}$, der **Kern** hat gerade mal einen Durchmesser von $8 \mu\text{m}$. Die Lichtleitung im Glasfaserkabel findet nur auf Grund der Tatsache statt, dass

$$n_k > n_M.$$

Nachrichtenübertragung

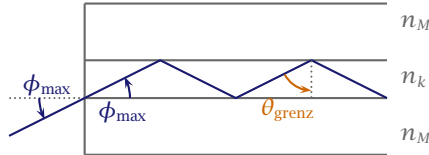
i.) $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$

ii.) $\nu = 200 \text{ THz}$

iii.) maximale Datenrate ist nach dem »Nyquist Theorem« $\lesssim \nu/2$: 100 TBit/s pro Glasfaser pro Wellenlänge

Transatlantikkabel

- i.) mehrere tausend Glasfasern
- ii.) Der Dämpfungsverlust liegt bei > 0.2 dB/km. Das heißt nach 15 km liegt nur noch das halbe Licht vor.

Intensität:

$$\begin{aligned} \frac{n_M}{n_k} &= \sin(\theta_{\text{grenz}}) = \cos(\phi_{\text{max}}) \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(\phi_{\text{max}})} \\ \Rightarrow n_k \sin \phi_{\text{max}} &= \sqrt{n_k^2 - n_M^2} \end{aligned}$$

Für die *numerische Apertur* gilt:

$$\begin{aligned} NA &= n_0 \sin(\theta_a^{\text{max}}) \\ &= n_k \sin(\phi_{\text{max}}) \\ &= \sqrt{n_k^2 - n_M^2} \end{aligned}$$

Typische Werte sind zum Beispiel für SMF 28 (corning single mode fibre):

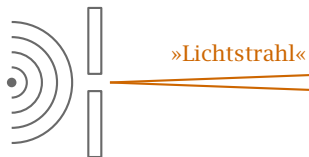
- i.) $NA = 0.13$, $n_k = n_M + 0.01$
- ii.) $\phi_{\text{max}} \approx 10^\circ$, n_M : amorpher Quarz (»fused silica«)
- iii.) n_k : Ge-Dotierung (sorgt für einen höheren Brechungsindex)

3

GEOMETRISCHE OPTIK

Die bisherige Basis unserer optischen Betrachtungen, war auf die Wellenoptik, welche mittels der Maxwellgleichungen beschrieben werden kann, beschränkt. Jetzt wollen wir das Licht als »Strahl« näher untersuchen.

Wir nehmen an, dass die zu untersuchenden Objekte viel größer sind als die Lichtwellenlänge. Hierbei werden Brechungseffekte vernachlässigt.



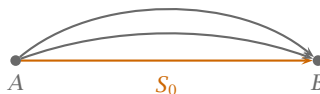
Kugelwelle

Definition eines »Lichtstrahls«:



- i.) Senkrechte (Normale) auf einer Wellenfront
- ii.) Ausbreitungsrichtung der Energie (Poyntingvektor)
- iii.) Wellenvektor \mathbf{k} (in homogenen, nicht brechenden Medien)

3.1 Das Fermat'sche Prinzip



Die Lichtausbreitung erfolgt derart, dass der optisch Weg $W = nd$ (Produkt aus Brechungsindex und zurückgelegter Strecke) extremal wird auf den tatsächlich zurückgelegten Pfad S_0 gegenüber den benachbarten Pfaden S_i . Typischerweise wird der Lichtweg minimal (»Licht ist faul«).

Für die optische Wellenlänge für den Pfad S_0 gilt:

$$W(s) = \int_{S(A \rightarrow B)} n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

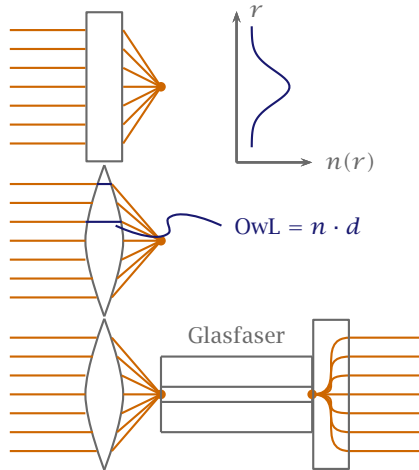
Das *Fermat'sche Prinzip* lautet also:

$$\left. \frac{\delta W(s)}{\delta S} \right|_{s_0} = 0.$$

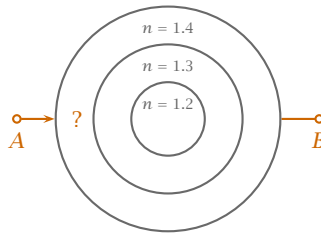
Das δ verdeutlicht, dass ein Variationsproblem vorliegt. Das Fermat'sche Prinzip lässt sich formal aus den Maxwellgleichungen herleiten.

Vorstellung: Nur der »wahre« Lichtpfad führt zur phasenrichtigen Aufsummation (»konstruktive Interferenz«) aller Partialwellen am Detektor. Variation der Pfade führt zu einem zusätzlichen Weg und somit zu zusätzlicher Phase und damit destruktiver Interferenz.

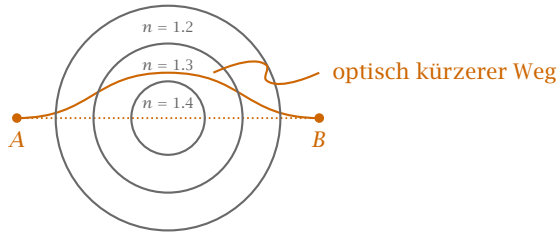
Anwendung: Gradientenindex-Linse, Gradientenfaser



Anwendung: Transformationsoptik



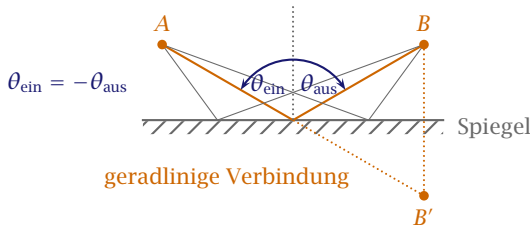
Optische Tarnkappe



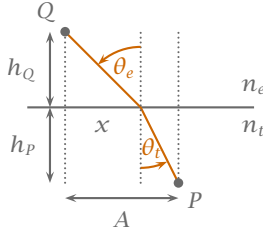
Trick: Aus dem Fermat'schen Prinzip lässt sich ableiten, dass der Lichtweg im Prinzip umkehrbar ist (Absorption, Farady-Effekt im stationären Magnetfeld). -o

Das Extremum des optischen Weges kann ein Maximum oder Minimum sein (z.B.: beim elliptischen Spiegel). Das Gesetz der geradlinigen Lichtausbreitung im homogenen Medium folgt direkt aus dem Fermat'schen Prinzip.

Reflexionsgesetz



3.1.1 Brechungsgesetz nach dem Fermatschen Prinzip



Für die optische Weglänge gilt:

$$W = n_e \sqrt{h_Q^2 + x^2} + n_t \sqrt{h_P^2 + (A - x)^2}.$$

Verwenden wir das Fermatsche Prinzip folgt:

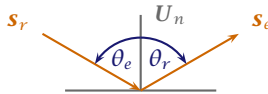
$$\frac{dW}{dx} \stackrel{!}{=} 0$$

$$n_e \frac{x}{\sqrt{n_e^2 + x^2}} = n_t \frac{A - x}{\sqrt{n_t^2 + (A - x)^2}}.$$

Durch Verwendung der trigonometrischen Eigenschaften folgt:

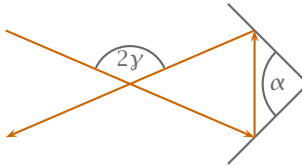
$$\boxed{n_e \sin(\theta_e) = n_t \sin(\theta_t)}$$

3.1.2 Reflexionsgesetz in vektorieller Form



$$\mathbf{s}_r = \mathbf{s}_e + 2\mathbf{u}_n \cos(\theta_e) = \mathbf{s}_e - 2(\mathbf{s}_e \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$$

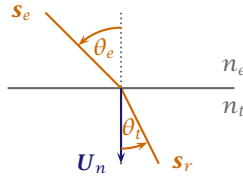
► Beispiel



Anwendung i.) Katzenaugen, 3 Spiegel in Konfiguration, Quadratecke ($\gamma = 90^\circ$)

ii.) Ablenkung: 180° aus allen Richtungen

Auch das Snelliussche Brechungsgesetz kann vektoriell formuliert werden:

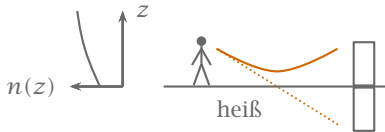


$$n_t \mathbf{s}_t = n_e \mathbf{s}_e + (n_t \cos(\theta_t) - n_e \cos(\theta_e)) \mathbf{u}_n$$

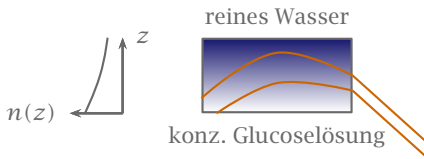
Mit $\cos(\theta_e) = \mathbf{u}_n \mathbf{s}_e$ folgt:

$$n_t \cos(\theta_e) = \sqrt{n_t^2 - n_e^2 + n_e^2 \cos^2(\theta_e)} \mathbf{u}_n$$

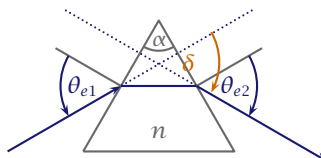
► *Beispiel* Fata Morgana:



Glucoselösung:



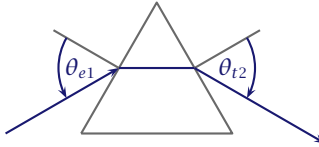
3.1.3 Strahlenablenkung durch ein Prisma



Für den Ablenkwinkel δ gilt:

$$\delta = \theta_{e1} - \alpha + \arccos \left(\sin(\alpha) \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_{e1})} - \sin(\theta_{e1}) \cos(\alpha) \right)$$

Bei symmetrischer Durchstrahlung gilt:



$\theta_{e1} = \theta_{t2}$, δ minimal

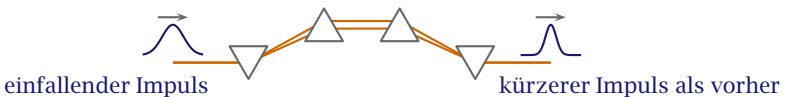
Anwendung:

- i.) spektroskopische Nutzung durch ein Prismenspektralapparat (Kenntnis von $n(\lambda)$ und α bzw. δ zur Bestimmung von λ)
- ii.) Messung von Brechungsindizes

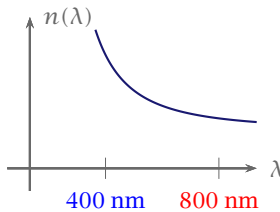


Abbé-Refraktometer

- iii.) Dispersionskompensation bei Femtosekundenlaser durch Nutzung von $n(\lambda)$



normale Dispersion (in Gläsern wird blau stets stärker als rot gebrochen)



3.1.4 Optische Abbildungen

Wichtig für die mathematisch einfache (linearisierte) Beschreibung von Strahlengängen sind kleine Winkel:

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha.$$

Dann lautet das Brechungsgesetz:

$$n_e \theta_e = n_t \theta_t.$$

Wichtige Taylorentwicklungen:

$$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

Für die paraxiale Optik, bzw. paraxiale Näherung gilt:

- i.) Strahlhöhe $h \ll$ Linsendurchmesser D
- ii.) $\alpha \rightarrow 0$ möglichst kleine Einfallswinkel

3.1.5 Reelle und virtuelle Abbildungen

Im Gegensatz zum virtuellen Bild lässt sich ein reelles Bild mit einem Schirm auffangen. Beim reellen Bild befindet sich das abbildende Instrument nicht zwischen Bildpunkt P und Beobachter, im Gegensatz zum virtuelle Bild.

Abbildung an einem Kugelspiegel

Es gilt:

$$\theta = \beta - \alpha = \alpha - \gamma.$$

Für die paraxiale Optik (Vernachlässigung von d) gilt weiter:

$$\tan(\gamma) \approx \gamma = \frac{h}{g}$$

$$\tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{h}{r}$$

$$\tan(\beta) \approx \beta = \frac{h}{b}$$

Somit erhält man die *Abbildungsgleichung eines sphärischen Spiegel*:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}}$$

Für die Brennweite f gilt hierbei:

$$f = \frac{r}{2}.$$

Benutzt man Strahlen, die Achsenfern auf den Spiegel treffen, so ergeben sich Abbildungsfehler, in diesen Fall sphärische-Aberation:

$$F \neq F'.$$

Ein Parabolspiegel (Paraboloid) erfüllt das Fermatsche Prinzip und führt beim Einfall parallel zur optischen Achse zur Fokussierung in nur einem Brennpunkt F , unabhängig von der Höhe.

3.1.6 Abbildung durch brechende Kugelflächen

Es gilt das Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin(\theta_e) = n_2 \sin(\theta_t).$$

Mit der paraxialen Näherung, für die d vernachlässigt wird folgt somit:

$$n_1 \theta_e = n_2 \theta_t.$$

Für den Einfallswinkel θ_e und den Transmissionswinkel θ_t gilt unter anderen:

$$\theta_e = \gamma + \alpha \quad , \quad \theta_t = \alpha - \beta.$$

Somit folgt mit den obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} n_1 \theta_e &= n_e \left(\frac{h}{g} + \frac{h}{r} \right) \\ &= n_2 \left(\frac{h}{r} - \frac{h}{b} \right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Abbildungsgleichung für brechende Kugelflächen in paraxialer Näherung:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Für die bildseitige Brennweite erhält man:

$$g \rightarrow \infty, \quad b = f_B = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}.$$

Für die gegenstandseitige Brennweite erhält man:

$$b \rightarrow \infty, \quad g = f_G = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}.$$

Vorzeichenkonvention

Variable	> 0	< 0
g	G links von S	G rechts von S
f_G	F_G links von S	F_G rechts von S
b	B rechts von S	B links von S
f_B	F_B rechts von S	F_B links von S
r	M rechts von S	M links von S

Bemerkung: Oder konsequente Vertauschung von links nach rechts der obigen Vorzeichenkonvention. →

Unsere Gleichungen erlauben bereits jetzt, beliebig komplexe Linsensysteme innerhalb der paraxialen Näherung zu berechnen.

3.1.7 Abbildungsgleichung für dünne Linsen

Vorgehen: Man bildet den Gegenstandspunkt G sukzessiv an den beiden Linsenoberflächen ab ($G = G_1 \rightarrow B_1 = G_2 \rightarrow B_2 = B$). →

1.) Abbildung:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}.$$

2.) Abbildung (vernachlässigung der Linsendicke d ($d \ll r_1, r_2$):

$$\begin{aligned} -\frac{n_2}{b_1} + \frac{n_3}{b} &= \frac{n_3 - n_2}{r_2} \\ \Rightarrow \frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} &= \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}. \end{aligned}$$

Für den einfachen Fall, dass sich unsere Linse in Luft befindet ($n_1 = n_3 = 1, n_2 = n_{\text{Glas}}$) ergibt sich die *Linsenschleifergleichung*:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n_{\text{Glas}} - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f}}.$$

Wir können durch verschiedene Kombinationen von r_1 und r_2 dieselbe Brennweite f einer dünnen Linse einstellen.

► **Beispiel** i.) Plan-Konvex Linse:

ii.) Bi-Konvex Linse:

Frage: Wann ist es angebracht, sich für die eine oder andere Linse zu entscheiden? →

Diese Frage lässt sich im Rahmen der paraxialen Optik nicht beantworten. Erst bei Berücksichtigung der Terme jenseits von $\sin(x) \approx$, $\tan(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$ lässt sich dies Frage beantworten.

Problem: Die sphärische Aberration →

3.1 **Faustregel:** Brechung auf möglichst viele Flächen verteilen, um die sphärische Aberration pro Fläche möglichst gering zu halten. ✕

► **Beispiel** Kollimierter (paralleler) Laserstrahl soll möglichst (klein) fokussiert werden. ◀

Bemerkung: Die »Bestform« hängt von den Brechungsindizes ab, z.B.: im \mathbb{R} bei $\lambda = 10 \mu\text{m}$ mit Germanium ($n = 4$) ist konkav konvex identisch. →

Bikonvexlinsen werden für Abbildungen eingesetzt:

1 : 1 Abbildung:

$$b = g = 2f \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2f} + \frac{1}{2f} = \frac{1}{f}.$$

Symmetrische Abbildung → Symmetrische Bikonvex Linse $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$.

INDEX

- Abbildungsgleichung eines sphärischen Spiegel, 68
- allgemeine Ellipsengleichung, 11
- Brechungsindex, 38
- Brewster Winkel, 54
- de Broglie Wellenlänge, 20
- dielektrische Verschiebungsdichte, 38
- Elektron im Kastenpotential, 26
- Elliptisch polarisiertes Licht, 10
- evaneszente Welle, 58
- Faltungintegral, 18
- Fermat'sche Prinzip, 62
- Fluktuationen, 29
- Fourierreihen, 16
- Fresnel'sche Formeln, 54
- Fresnel'sche Formeln für den Reflexionsgrad einer Grenzfläche, 50
- Gruppengeschwindigkeit, 14
- Gruppengeschwindigkeitsdispersion, 14
- Heisenbergsche Unschärferelation, 23, 30
- Helmholtzgleichung, 22
- Impulsoperator, 21
- Intensität, 4
- Jones-Vektoren, 10
- Kommutator
 - antisymmetrisch, 31
 - bosonisch, 31
 - fermionisch, 31
- Kramer-Kronig-Relation für $\tilde{\chi}$, 46
- Kramers-Kronig-Relation, 45
- Linsenschleifergleichung, 69
- Lorentz-Drude-Modell, 39
- Maxwellgleichungen in Materie, 37
- Mittelwert, 26
- numerische Apertur, 60
- ohmsche Gesetz, 43
- Ortsunschärfe, 29
- Parseval-Theorem, 7
- Permittivität
 - relative elektrische, 38
- Phasengeschwindigkeit, 15
- Plasmafrequenz, 44
- Poisson'scher Fleck, 34
- Poyntingvektor, 4
- Reflexion am festen Ende, 51
- Reflexion am losen Ende, 51
- Schrödingergleichung
 - im feldfreien Raum, 20
 - ortsabhängiges Potential, 21
 - zeitabhängig, 21
 - zeitunabhängig, 33
- Snelliussche Brechungsgesetz, 49
- Stokes-Kugel, 9
- Suszeptibilität
 - magnetisch, 38
- Varianz, 29
- Wahrscheinlichkeit, 26
- Wellenpaket, 14